

Álgebra

RELACIONES

INTRODUCCIÓN

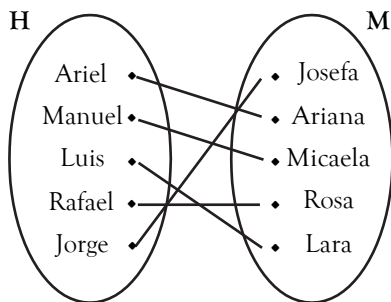
En una gran fiesta organizada por la Trilce que fue llevada a cabo en las instalaciones del Jockey Plaza, todos los alumnos del Primer Año tenían un sticker con su nombre pegado en el lado izquierdo de su pecho. En un momento de la fiesta, el anfitrión tomó el micrófono y dijo lo siguiente: “Todos bailarán en pareja, con la condición de que sus nombre empiecen con la misma letra”.

Ahora digamos que existen en la fiesta dos conjuntos, el de los hombres o conjunto “H”, y el de las mujeres o conjunto “M”, es decir:

$H = \{\text{Ariel, Manuel, Luis, Jorge, Rafael}\}$
 $M = \{\text{Josefa, Ariana, Micaela, Rosa, Lara}\}$

Entre ellos se ha establecido por medio de la fiesta una relación de modo que a cada hombre le corresponde una mujer cuyo nombre tenga la misma letra inicial.

Gráficamente:



Las parejas señaladas por flechas pueden también ser representadas por pares ordenados, tema que ya vimos la semana pasada. Ahora, veamos algunas definiciones.

PRODUCTO CARTESIANO

Dados los conjuntos A y B, se llama producto cartesiano de A y B, denotado por $A \times B$, al conjunto de todos los pares ordenados (a; b), donde $a \in A$ y $b \in B$.

$$A \times B = \{(a;b) / a \in A \text{ y } b \in B\}$$

Ejemplo:

$$A = \{3; 5; 7\} \text{ y } B = \{a, b\}$$

$$A \times B = \{(3; a), (3; b), (5; a), (5; b), (7; a), (7; b)\}$$

$$B \times A = \{(;), (;), (;), (;), (;)\}$$

Definición

Una relación “R”, del conjunto “A” al conjunto “B”, es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$.

Notación:

$$R : A \rightarrow B$$

Ejemplo:

Sean los conjuntos:

$$A = \{1; 3; 5\} \text{ y } B = \{2; 4\}$$

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 4), (3; 2), (3; 4), (5; 2), (5; 4)\}$$

Algunas relaciones: de “A” en “B” son:

$$R_1 = \{(1; 2), (3; 2)\}$$

$$R_2 = \{(3; 4), (5; 2), (5; 4), (1; 2)\}$$

$$R_3 = \{(1; 2), (5; 4), (3; 2)\}$$

⋮
⋮

Se puede tener muchas otras relaciones.
 Ahora grafiquemos " R_3 " empleando el diagrama sagital y el diagrama cartesiano.

Ejercicios Resueltos

Diagrama Sagital

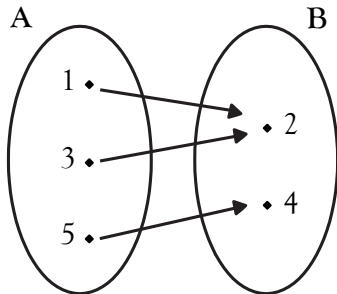
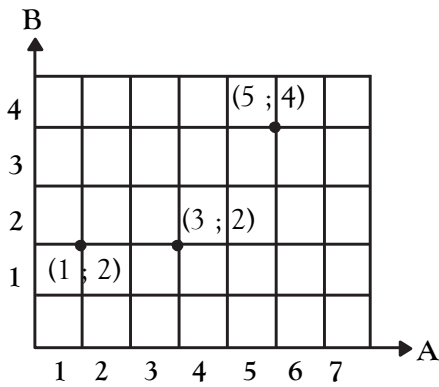
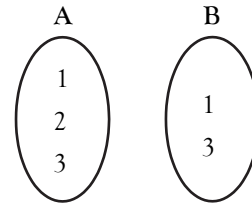


Diagrama Cartesiano

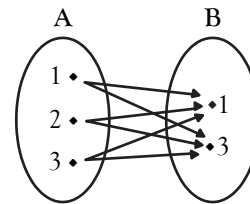


1. Dado el diagrama:



halla $A \times B$.

Resolución:



$$A \times B = \{(1;1), (2;1), (3;1), (1;3), (2;3), (3;3)\}$$

2. Del problema 1, halla:

$$R = \{(x;y) / x \in A \wedge y \in B \wedge x+y \leq 4\}$$

Resolución:

Nos pide que generemos un conjunto de pares ordenados (x;y) donde "x" es elemento de A e "y" es elemento de B, además que la suma de los componentes no pase de 4.

$$\boxed{R = \{(1;1), (2;1), (3;1), (1;3)\}}$$

3. Halla la relación de R de A en B si:

$$A = \{x \in \mathbb{N} / x \in [5; 16[\}$$

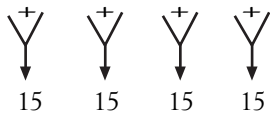
$$B = \{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 7 \}$$

cuya regla de correspondencia es $y = 15 - x$.

Resolución:

La regla de correspondencia es $x + y = 15$, entonces

$$R = \{(12;3), (11;4), (10;5), (9;6)\}$$



4. Dado el siguiente producto cartesiano:

$$A \times B = \{(1;2), (3;2), (5;2), (1;\sqrt{2}), (3;\sqrt{2}), (5;\sqrt{2})\}$$

indica los conjuntos que lo originaron.

Resolución:

Si observamos las primeras componentes de los pares ordenados determinaremos el primer conjunto y lo llamamos A.

$$A = \{1; 3; 5\}$$

y el conjunto de las segundas componentes lo llamamos B.

$$B = \{2; \sqrt{2}\}$$

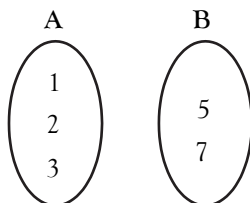
5. Si se cumple que el producto cartesiano:

$$A \times B = \{(1;5), (2;5), (3;a), (1;7), (2;b), (3;7)\}$$

calcula ab .

Resolución:

Los conjuntos A y B serán:



Donde al hacer el producto cartesiano $A \times B$ nos damos cuenta que "a" es 5 y "b" es 7.

$$\boxed{W \quad ab = 5 \cdot 7 = 35}$$

Nota:

1. Indica el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

- * Toda función es una relación.
- * Toda relación es una función.
- * Toda ecuación asociada geoméricamente a una recta, es una relación funcional.
- * Toda ecuación asociada geoméricamente a una parábola, es una relación funcional.

- a) FVFF b) VFFF c) VFVV
d) VFVF e) VFFV

2. Si $F = \{(8;2), (2;a), (a^2 - 1;b), (2;2a - 3), (3;5)\}$, indica la suma del mínimo y máximo valor de la función.

- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

3. Calcula "a+b+c" para que el conjunto de pares ordenados

$$M = \{(2;4), (5;a+b), (3;6), (2;c+b), (5;3), (3;2a - c)\}$$

represente una función.

- a) 11 b) 1 c) 21
d) 16 e) 15

4. La siguiente relación de pares ordenados:

$$R = \{(1;2a), (2;7), (5;1), (1;3a - 5), (7;9)\}$$

es una función. Indica la suma de los elementos del rango de dicha función.

- a) 7 b) 27 c) 17
d) 37 e) 36

5. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es $f_{(x)} = mx + b$; además $f_{(3)} = 1$ y $f_{(-3)} = 5$. Calcula "mb".

- a) 1 b) -2 c) 2
d) 3 e) -22

6. Sean f y g dos funciones, tales que $f_{(x)} = ax - 1$ y $g_{(x)} = 3x + b$, además $f_{(1)} = g_{(-1)}$ y $f_{(-1)} = g_{(1)}$. Calcula $f_{(2)} + g_{(3)}$.

- a) 3 b) 4 c) 1
d) -3 e) -4

Resolviendo en clase

- 1 Halla los productos cartesianos correspondientes, graficándolos mediante el diagrama sagital y cartesiano.

$$E = \{x/x \text{ es una vocal}\}$$

$$F = \{x/x \text{ es una letra de la palabra "menor"}\}$$

Resolución:

Rpta:

- 2 Halla los productos cartesianos correspondientes, graficándolos mediante el diagrama sagital y cartesiano.

$$T = \{x/x \text{ es par} \wedge 2 \leq x < 10\}$$

$$K = \{x/x \text{ es impar} \wedge 6 < x \leq 11\}$$

Resolución:

Rpta:

- 3 Dados los siguientes productos cartesianos, escribe los conjuntos que lo originaron:

$$A \times D = \{(2; 2), (2; -3),$$

$$(2; -5), (3; 2), (3; -3), (3; -5)\}$$

Resolución:

Rpta:

- 4 Dados los conjuntos "A" y "B", halla la relación "R" de "A" en "B" cuya regla de correspondencia se indica:

$$A = \{1; 2\}$$

$$B = \{1; 2\}$$

$$\text{Regla de correspondencia: } y = 2x$$

Resolución:

Rpta:

5 Resuelva:

$$A = \{x/x \in \mathbf{N} \wedge 1 \leq x \leq 2\}$$

$$B = \{x/x \in \mathbf{N} \wedge 1 \leq x \leq 2\}$$

Regla de correspondencia: $y = 2x$

Resolución:

6 Resuelve:

$$A = \{x/x \in \mathbf{N} \wedge 0 < x < 3\}$$

$$B = \{x/x \in \mathbf{N} \wedge 0 < x \leq 2\}$$

Regla de correspondencia: $y = 2x$

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Resuelve:

$$A = \{y/y \in \mathbf{N} \wedge 1 \leq y < 3\}$$

$$B = \{x/x \in \mathbf{N} \wedge 0 < x \leq 2\}$$

Regla de correspondencia: $y = 2x$

10. Sean:

$$A = \{2; 3; 4; 5\}; \quad B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$$

Si se define la correspondencia:

$$P = \{(x; y) \in A \times B / x+y \text{ es par}\}$$

calcula $n(P)$.

8. El _____ $A \times B$ es el conjunto cuyos elementos son los $(a;b)$, tal que las primeras componentes a pertenecen al conjunto _____ y las segundas componentes b pertenecen al conjunto _____.

11. Sean:

$$M = \{1; -3; 4; 5; 6\};$$

$$N = \{1; 4; 16; 9; 25; 17\}$$

$$R = \{(x; y) \in M \times N / y = x^2\}$$

Entonces $n(R)$ es:

9. Sea la relación:

$$R = \{(5; 9), (3; 7), (4; 6), (11; 2)\}$$

$$R^* = \{(7; a), (2; b), (c; 5), (6; d)\}$$

halla $a+b+c+d$.

12. Sean:

$$A = \{18; 28; 10; 22\}; \quad B = \{20; 22; 23; 26\}$$

se define la correspondencia:

$$Q = \{(x; y) \in A \times B / y = x - 2\}$$

Calcula $n(Q)$.

Para reforzar

1. Halla los productos cartesianos correspondientes, gráfíndolos mediante el diagrama sagital y cartesiano.

$$A = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 1 < x < 4\}$$

$$B = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 3 \leq x \leq 5\}$$

2. Halla los productos cartesianos correspondientes, gráfíndolos mediante el diagrama sagital y cartesiano.

$$C = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 11 < x < 15\}$$

$$D = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 1 \leq x \leq 2\}$$

3. Halla los productos cartesianos correspondientes, gráfíndolos mediante el diagrama sagital y cartesiano.

$$G = \{x/x \in \mathbb{Z} \wedge -1 \leq x \leq 1\}$$

$$H = \{x/x \in \mathbb{N} \wedge 2 < x < 4\}$$

4. Dados los conjuntos "A" y "B", halla la relación "R" de "A" en "B" cuya regla de correspondencia se indica:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$B = \{2; 5; 6\}$$

Regla de correspondencia: $x+y < 9$

5. Dados los conjuntos "A" y "B", halla la relación "R" de "A" en "B" cuya regla de correspondencia se indica:

$$A = \{10; 2\}$$

$$B = \{11; 13; 15\}$$

Regla de correspondencia: $x+y < 23$

6. Sean:

$$M = \{58; 63; 72; 85\}$$

$$N = \{35; 26; 49; 58\}$$

$$R = \{(x; y) \in M \times N / x + y \text{ es impar}\}$$

halla $n(R)$.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

7. Sean:

$$A = \{1; 2; 3; 4\}$$

$$B = \{3; 4; 5; 6\}$$

$$R = \{(x; y) \in A \times B / x = y\}$$

Halla $n(R)$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

8. Sean:

$$R_1 = \{(x; y) / x \leq y\}$$

$$R_2 = \{(x; y) / x + 1 = y\}$$

$$R_3 = \{(x; y) / x \neq y\}$$

Definidas en el conjunto $A = \{2; 4; 5; 6\}$
¿se puede afirmar que $R_1 \cap R_2 \subset R_3$?

a) Sí b) No c) N.A.

9. Sea el conjunto:

$$A = \{(2; 3), (6; 8), (9; 11), (3; 7)\}$$

halla la suma de los elementos del $\text{Dom}(A^*)$.

a) 24 b) 26 c) 29
d) 33 e) 41

10. Dados los conjuntos:

$$A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$B = \{3; 4; 5; 6; 7; 8\}$$

$$R = \{(x; y) \in A \times B / y - x - 2 = 0\}$$
, halla $n(R)$.

a) 4 b) 5 c) 3
d) 6 e) 2

11. Sean:

$$M = \{2; 3; 4; 5; 6\}$$

$$N = \{1; 4; 6; 9; 25; 17\}$$

$$R = \{(x; y) \in M \times N / y = x^2\}$$
, halla $n(R)$.

a) 5 b) 1 c) 4
d) 3 e) 2

12. Sean:

$$A = \{2; 0; 6; 8\}$$

$$B = \{5; 7; 10; 12\}$$

Se define la correspondencia:
 $M = \{(x; y) \in A \times B / y - x \text{ es par}\}$. Halla $n(M)$.

a) 1 b) 5 c) 4
d) 8 e) 6