



Álgebra

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS

DEFINICIÓN

El logaritmo de un número real positivo (N), en una **BASE POSITIVA Y DIFERENTE DE LA UNIDAD (B > 0; B ≠ 1)**, ES EL exponente al cual hay que elevar el número denominado base para que nos reproduzca el número dado (N).

Así en:

$$\log_b N = x \quad \square \quad \begin{array}{l} \text{número} \\ \text{base} \end{array} \quad \square \quad \text{logaritmo}$$

Se lee: "logaritmo del número N en base b es igual a x".

$$\text{Si } \log_b N = x \quad \text{entonces } b^x = N$$

$$\text{En efecto: } 8 = 2^3 \quad \square \quad \log_2 8 = 3$$

$$81 = 3^4 \quad \square \quad \log_3 81 = 4$$

$$9 = (1/3)^{-2} \quad \square \quad \log_{(1/3)} 9 = -2$$

$$5 = (\sqrt{5})^2 \quad \square \quad \log_{\sqrt{5}} 5 = 2$$

Para reafirmar la definición de logaritmo, veamos unos cuantos ejercicios de aplicación:

Ejemplo 1:

Determina el valor de x en:

$$\log_{\sqrt{2}} 8 = x + 4$$

Resolución:

Aplicando la definición de logaritmos tendrá:

$$\sqrt{2}^{x+4} = 8 \quad \square \quad 2^{\frac{x+4}{2}} = 2^3 \quad \square \quad \frac{x+4}{2} = 3$$

$$x + 4 = 6$$

$$4x = 2$$

Ejemplo 2:

Determina el valor de x en la siguiente igualdad:

$$\log_{x+1} 81 = 2$$

Resolución:

Por definición de logaritmos, se cumple:

$$(x + 1)^2 = 81 \quad 4 \quad x + 1 = \pm 9$$

de donde:

$$81 \quad x + 1 = 9$$

$$4 \times 1 = 8$$

(verifica la igualdad original)

y

$$x + 1 = -9$$

$$x_2 = -10$$

(No verifica la igualdad original, porque la base tiene que ser mayor que cero y diferente de la unidad).

4 Única solución: x = 8

IGUALDADES FUNDAMENTALES DE LOS LOGARITMOS

Se sabe que:

$$\frac{\log_b N = x}{(I)} \quad \text{®} \quad \frac{b^x = N}{(II)}$$

Reemplazando (I) y en (II), es decir, el valor de x lo reemplazamos en la segunda igualdad y se tendrá:

$$\log_b N = N$$

Primera igualdad fundamental

Ejemplo:

$$a) 3^{\log_3 7} = 7$$

$$b) 4^{\log_4 3} = 3$$

$$\log_b b^x = x \quad \text{Segunda igualdad fundamental}$$

Ejemplo:

$$a) \log_5 5^4 = 4$$

$$b) \log_{\sqrt{2}} \sqrt{2}^5 = 5$$

$$c) \log_7 7^{x+1} = x + 1$$

PROPIEDADES GENERALES DE LOS LOGARITMOS

1. No existe el logaritmo de los números negativos en el campo de los números reales pero sí en el de los complejos.

Ejemplo:

$$\log_3 -9 : \nexists \text{ en } \mathbb{R}, \text{ pero sí en } \mathbb{C}$$

2. La base de un logaritmo debe ser siempre positiva y diferente de la unidad.
3. El logaritmo de la unidad en cualquier base es cero.

$$\log_b 1 = 0$$

4. El logaritmo de la base será siempre igual a la unidad.

$$\log_b b = 1$$

5. El logaritmo de un producto será igual a la suma de los logaritmos de los factores.

$$\log_b (A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$$

Ejemplo:

$$\log_3 2 + \log_3 5 = \log_3 10$$

$$\log_2 3 + \log_2 x + \log_2 y = \log_2 3xy$$

En general:

$$\log_b (A \cdot B) = \log_b A + \log_b B$$

6. El logaritmo de una fracción será igual a la diferencia de los logaritmos del numerador menos el denominador respectivamente.

$$\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

Ejemplo:

$$\log_2 \left(\frac{5}{x} \right) = \log_2 5 - \log_2 x$$

$$\log_3 5 - \log_3 4 = \log_3 \left(\frac{5}{4} \right)$$

$$\log_b \left(\frac{AB}{CD} \right) = \log_b A + \log_b B - \log_b C - \log_b D$$

En general:

$$\log \left(\frac{A}{B} \right) = \frac{-\log A}{\log B}$$

7. **Logaritmo de una potencia**
(Propiedad del sombrero)

Estará expresado por el producto del exponente del número por el logaritmo de la base de dicha potencia.

$$\log_b N^n = n \log_b N$$

Ejemplo:

$$a) \log_3 5^2 = 2 \log_3 5$$

$$b) 4 \log_5 7 = \log_5 7^4$$

En general:

$$\log_b N^n = n \log_b N$$

8. **Logaritmo de una raíz**

Estará expresado por el logaritmo del número dividido entre el índice de la raíz.

$$\log_b \sqrt[n]{N} = \frac{1}{n} \log_b N$$

Ejemplo:

$$a) \log_3 \sqrt[7]{4} = \frac{1}{7} \log_3 4$$

$$b) \frac{1}{3} \log_2 5 = \log_2 \sqrt[3]{5}$$

$$c) \frac{3}{5} \log_7 2 = \log_7 \sqrt[5]{2^3}$$

9. Cambio de base

$$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}$$

o también:

$$\log_b N = \frac{1}{\log_a b} \cdot \log_a N$$

en donde a la fracción $\frac{1}{\log_a b}$ se le conoce como el **módulo o factor de conversión**.

Así por ejemplo:

* Transforma $\log_2 5$ a base 7

$$\log_2 5 = \frac{\log_7 5}{\log_7 2}$$

* $\log_9 8$ a base 4

$$\log_9 8 = \frac{\log_4 8}{\log_4 9}$$

10. Regla de cadena

El producto de un logaritmo por otro que resulta de intercambiar al número y a la base, será igual a la unidad.

$$\log_b a \cdot \log_a b = 1$$

Consecuencias de la regla de la cadena

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

$$\log_b a \cdot \log_c b \cdot \log_a c \cdot \log_e d = \log_e a$$

$$\log_b a \cdot \log_a c \cdot \log_c d \cdot \log_d e = \log_b e$$

Corolario 1:

$$\log_{b^n} x^m = \frac{m}{n} \log_b x$$

Corolario 2:

Si se invierte la base de un logaritmo automáticamente este cambia de signo:

$$\log_{\frac{1}{b}} N = -\log_b N$$

11. Si un número tiene como exponente a un logaritmo, y se intercambia simultáneamente (permuta) el número de éste, con el que hace de base la expresión no se altera.

Es decir:

$$\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$$

Ejemplo:

$$\frac{\log_2 5}{3} = \frac{\log_5 3}{5}$$

$$\frac{\log_5 \sqrt{6}}{7} = \frac{\log_7 5}{\sqrt{6}}$$

Resolviendo en clase

1 Resuelve y calcula “x” en:

$$\log(x-2) + \log(x+3) = \log 14$$

Resolución:

Rpta:

2 El cuádruplo del logaritmo de un cierto número excede en 4 al duplo del logaritmo del mismo. ¿Cuál es este número?

Resolución:

Rpta:

3 Al resolver:

$$\log_3(2x+1) + \log_{\frac{1}{3}}(x+8) = 0$$

el valor de x es:

Resolución:

Rpta:

4 Si $\log_b a = 4$, halla:

$$(a \log_a^2 + b^4 \log_b^2) \log_b c^4$$

Resolución:

Rpta:

5 Si $\log_a 2 = x$; $\log_a 3 = y$; $\log_a 5 = Z$, calcula:

$$\log_a 2700$$

Resolución:

6 Calcula el valor de:

$$W = \sqrt{7b^{\log_a 3} + 3^{\log_a b}}$$

$$\text{si } \log_a b = \log_3 2$$

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Al reducir:

$$\frac{1 + \log_2 3}{1 - \log_2 3} + \frac{1 + \log_3 2}{1 - \log_3 2}$$

se obtiene:

8. Calcula:

$$\log_3 3 + \log_3 9 + \log_3 27 + \dots + \log_3 3^{10}$$

9. Si $243(\log_x z)^5 = 32(\log_y z)^5$.

Determina: $\log_y x$

$$10. \text{ Reduce: } \log_n \left\{ \log_n \left(\frac{n-1}{\sqrt[n]{n}} \right) \right\}$$

$$\text{si } n > 1$$

11. Si $\log_{14} 28 = a$, halla $\log_{49} 16$.

12. Determina el valor de x en:

$$\log_2 x + \log_4 x = 3$$

Para reforzar

1. Resuelve la siguiente ecuación:

$$3\log x - \log 32 = 2\log \frac{x}{2}$$

- a) 7 b) 8 c) 9
D) 10 **E) 11**

2. Halla el valor de "m" en:
 $\log(m-4) + \log(m+5) = \log 36$

- a) 6 b) 7 c) 8
D) 9 **E) 10**

3. Resuelve y halla "x" en la ecuación:

$$\frac{1}{\log_{(x+3)} 10} + \frac{1}{\log_{(x+1)} 10} = \log 15$$

- A) 0** **B) 1** **C) 2**
d) 3 e) 4

4. Si:

$$\log 3 = a; \log 2 = b; \text{ halla } \log(5!)$$

- A) 3A+B+1** **B) A-b+2** c) 3a-2B+1
D) A+2B+1 **E) 2B-A+1**

5. Sabiendo que "a" y "b" son raíces positivas de la ecuación:

$$x^2 - 4x + m^2 = 0,$$

halla:

$$L = \log_m a^b + \log_m a^a + \log_m b^b + \log_m b^a$$

- a) -4 b) 4 c) -8 d) 8
e) 6

6. Calcula x.

$$\log_a (x+1) = \log_a x + 2$$

- a) a^2-1 **B) A^2** c) $\frac{1}{a^2-1}$
d) a e) 7

7. Simplifica:

$$P = \frac{\frac{\log_x y}{x} \cdot y^{\log_y x}}{\log_x y^x \cdot \log_y x^y}$$

- A) 0** **B) 1** **C) 2**
d) 3 e) 4

8. Si $\log 2 = m$; $\log 3 = n$; $x = \log 36$, halla x.

- A) 2M+2N** **B) 2M+N/2** **C) 2M-N/2**
d) 2m - 2n e) m+n

9. Determina "x" a partir de la siguiente igualdad:

$$\log \frac{x}{10} + \log 2a = \log a \frac{1}{2}$$

- $\frac{\sqrt{5}}{10} \cdot \frac{a}{a}$ ~~b) a~~ c) $\sqrt{5} \cdot a$
d) $\frac{a}{\sqrt{5}}$ e) 6

10. Si $\log_7 4 = m$; $\log_7 5 = n$, halla $\log_7 980$

- a) m - n - 2 b) m+n- 2 c) m+n+2
d) 2 - m - N **E) 2M+N+1**

11. Halla la suma de los valores de x que resuelven la ecuación:

$$\log 16 + \log x + \log (x-1) = \log (x^2-4) + \log 15$$

- A) 12** **B) 16** **C) 8**
D) 11 **E) 4**

12. Si $2^x + 2^{-x} = 4$, halla una solución de "x". a)

- $\log_2 (2 - 3\sqrt{1})$
b) $\log_2 (2 + \sqrt{3})$
c) $\log_2 (\sqrt{3} - 2)$
d) $\log_2 (1 + 2\sqrt{3})$
e) $\log_2 (1 + \sqrt{3})$