

# Álgebra

## PROGRESION GEOMETRICA

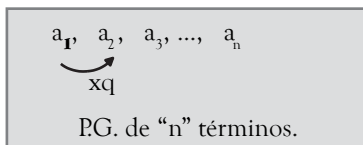
### DEFINICIÓN

Decimos que una sucesión de números está en progresión geométrica (P.G.), cuando cada uno de ellos es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante, llamada razón (q) de la progresión.

#### Ejemplos:

**1; 2; 4; 8; ...**  
**-1; -3; -9; -27; ...**  
 a, aq, aq<sup>2</sup>, aq<sup>3</sup>, ...

#### Representación:



donde:  $q = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

La razón (q), se encuentra dividiendo cualquier término entre su inmediato anterior.

❖ Si  $0 < q < 1$  □ la progresión es creciente.

**2; 4; 8; 16; ... (q = 2)**

❖ Si  $q < 1$  □ la progresión es decreciente.

**9; 3; 1; 1/3; ... (q = 1/3)**

❖ Si  $q < 0$  □ la progresión es oscilante.

**1; -3; 9; -27; 81; ... (q = -3)**

### TÉRMINO ENÉSIMO (a<sub>n</sub>)

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

#### Ejemplo:

Halla el doceavo término en:

$$\frac{1}{729}; \frac{1}{243}; \frac{1}{81}; \dots$$

#### Resolución:

Datos:

$$a_1 = \frac{1}{729}; q = 3; a_{12} = ?$$

Luego:

$$a_{12} = a_1 \cdot q^{12-1} = \frac{1}{729} \cdot 3^{11}$$

$$\square a_{12} = \frac{3^{11}}{3^6} = 3^5 \quad 4 a_{12} = 243$$

### SUMA DE LOS "N" TÉRMINOS DE UNA P.G. (S<sub>n</sub>)

$$S_n = a_1 \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right)$$

#### Ejemplos:

Calcula:  $S = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{17}$

#### Resolución:

Datos:

$$a_1 = 5; q = 5; S_{17} = ?$$

Luego:

$$S_n = a_1 \left( \frac{q^n - 1}{q - 1} \right) = 5 \left( \frac{5^{17} - 1}{4} \right)$$

## SUMA DE LOS INFINITOS TÉRMINOS O SUMA LÍMITE ( $S_L$ )

$$S_L = \frac{a_1}{1 - q}; \quad 0 < q < 1$$

**Ejemplo:**

Calcula:

$$S = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots$$

**Resolución:**

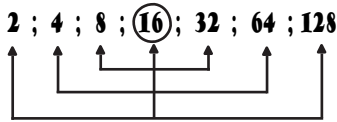
Datos:  $a_1 = \frac{1}{8}$ ;  $q = \frac{1}{2}$ ;  $S_L = ?$

Luego:

$$S_L = \frac{\frac{1}{8}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{2}} \quad \square \quad S_L = \frac{1}{4}$$

## TÉRMINO CENTRAL ( $a_c$ )

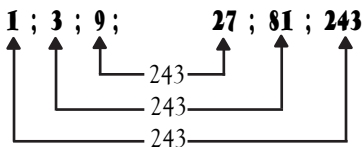
$$a_c = \sqrt{a_1 \cdot a_n}$$



$$TC = \sqrt{2 \cdot 128} = \sqrt{4 \cdot 64} = \sqrt{8 \cdot 32} = 16$$

## TÉRMINOS EQUIDISTANTES

En toda P.G. limitada, el producto de dos términos equidistantes de los extremos nos da una misma cantidad.



## MEDIOS GEOMÉTRICOS

Son los términos de una P.G. comprendida entre sus extremos.



## INTERPOLACIÓN DE MEDIOS GEOMÉTRICOS

Es la operación que consiste en formar una P.G. conociendo los extremos y el número de medios a interpolar. La razón de interpolación es:

$$q = \sqrt[n+1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

## Ejercicios Resueltos

1. Halla "x" en la P.G.:

$$\sqrt{2}^x; 2^{2x-1}; 4^{3x-2}; \dots$$

**Resolución:**

Como:  $a_1, a_2, a_3, \dots$  forman una P.G.

La razón:

$$q = \frac{a^2}{a^1} = \frac{a^3}{a^2}$$

Luego :

$$\frac{2^{2x-1}}{\sqrt{2}^x} = \frac{4^{3x-2}}{2^{2x-1}}$$

Buscando bases iguales:

$$2^{2x-1-1x} = 2^{6x-4-(2x-1)}$$

Igualando exponentes:

$$\frac{4x-2-x}{2} = 6x-4-2x+1$$

$$4 = 5x \quad \square \quad x = \frac{4}{5}$$

2. Halla el décimo tercer término en la P.G. :

$$\frac{1}{729}; \frac{1}{243}; \frac{1}{81}; \dots$$

**Resolución:**

$a_1, a_2, a_3, \dots$  forman una P.G.

Cálculo de la razón:

$$q = \frac{\frac{1}{243}}{\frac{1}{729}} \quad \square \quad q = 3$$

Como:  $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$

$$a_n = \frac{1}{3} \cdot 3^{n-1}$$

$$a_{13} = \frac{3^{12}}{3^6} \square a_{13} = 729$$

3. Halla el valor de "a" en la PG.:

$$(11-a); (2a-1); (9a+3); \dots$$

**Resolución:**

Por razón:  $\frac{2a-1}{11-a} = \frac{9a+3}{2a-1}$

Efectuando:

$$4a^2 - 4a + 1 = 99a + 33 - 9a^2 - 3a$$

$$13a^2 - 100a - 32 = 0$$

De donde:  $a = 8$

4. La suma de los seis primeros términos de una PG. es igual a 9 veces la suma de los tres primeros. Halla la razón.

**Resolución:**

Sea la PG.

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots$$

Calculando  $S_6$ :

$$S_6 = \frac{a_1(q^6-1)}{q-1}$$

Calculando  $S_3$ :

$$S_3 = \frac{a_1(q^3-1)}{q-1}$$

Luego:

$$S_6 = 9(S_3)$$

$$\frac{a_1(q^6-1)}{q-1} = 9 \frac{a_1(q^3-1)}{q-1}$$

Efectuando:

$$(q^3 + 1)(q^3 - 1) = 9(q^3 - 1)$$

$$q^3 + 1 = 9 \quad \square \quad q = 2$$

5. Halla la suma de:

$$S = \frac{1}{7} + \frac{2}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{2}{7^4} + \dots$$

**Resolución:**

$$S = \left( \frac{1}{7} + \frac{1}{7^3} + \dots \right) + \left( \frac{2}{7^2} + \frac{2}{7^4} + \dots \right)$$

Suma límite                      Suma límite

$q = \frac{1}{7^2}$                                        $q = \frac{1}{7^2}$

Luego:

$$S = \frac{\frac{1}{7}}{1 - \frac{1}{7^2}} + \frac{\frac{2}{7^2}}{1 - \frac{1}{7^2}}$$

$$S = \frac{\frac{1}{7}}{\frac{48}{49}} + \frac{\frac{2}{7^2}}{\frac{48}{49}} = \frac{7}{48} + \frac{2}{48}$$

$$4 \quad S = \frac{3}{16}$$

## Resolviendo en clase

- 1 Halla el término de lugar 16 en la P.G.:

$$\frac{1}{256}; \frac{1}{128}; \frac{1}{64}; \dots$$

Resolución:

**Rpta:**

- 2 Halla el décimo segundo término de una P.G., si el quinto es 32 y el octavo es 4.

Resolución:

**Rpta:**

- 3 El producto de tres números en P.G. es 216 y la suma de los productos que resultan tomados 2 a 2 es 156. Halla los números.

Resolución:

**Rpta:**

- 4 En una P.G. se conoce que:

$$S_6 = 28(S_3), \text{ halla "q".}$$

Resolución:

**Rpta:**

5 Calcula la suma límite:

$$S = 4 + 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \dots$$

*Resolución:*

*Rpta:*

6 Interpola cuatro medios geométricos entre  $1/9$  y  $-27$ .

*Resolución:*

*Rpta:*

## Ahora en tu cuaderno

7. Calcula la suma de todas las áreas de todos los cuadrados que se pueden inscribir sucesivamente a partir de un cuadrado de 4m de lado.

8. El segundo término de una P.G. es **-18 Y EL QUINTO TÉRMINO ES 16/3. CALCULA EL CUARTO** término.

9. La medida de los ángulos internos de un triángulo forman una progresión geométrica de razón 2. Calcula el ángulo mayor.

10. Calcula la suma:

$$1 + \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{3}{4}\right) + \left(1 - \frac{7}{8}\right) + \left(1 - \frac{15}{16}\right) + \dots$$

11. Encuentra cuatro números positivos que forman una P.G. de modo que  $a_1 + a_2 = 15$  Y  $a_3 + a_4 = 60$ . Halla la razón.

12. **SI A 110; 90 Y 60 SE LE RESTA UNA MISMA CANTIDAD,** se obtiene tres nuevas cantidades que están en progresión geométrica. ¿Cuál es la razón de dicha progresión?

## Para reforzar

1. Cuatro medios geométricos interpolados entre **160 Y 5 DE UNA P.G. SON:**

A) **5; 10; 20; 40**      B) **10; 30; 60; 90**  
 C) **80; 40; 20; 10**  
 D) **120; 90; 60; 30**      E) **59 ; 55; 35; 15**

2. Halla :

$$S = \frac{1}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \dots$$

A) **7/16**      B) **7/17**      C) **4/17**  
 D) **5/17**      E) **5/24**

3. En la progresión:

96; 48; 24; ...

calcula el décimo término.

A) **1/16**      B) **3/4**      C) **3/16**  
 D) **5/8**      E) **3/5**

4. En una P.G., el quinto y el segundo término son **81 Y 24, RESPECTIVAMENTE. CALCULA EL PRIMER** término.

A) **16**      B) **32**      C) **36**  
 d) 38      e) 56

5. Si en una progresión geométrica:  $a_1=2$  y  $a_6=64$ , encuentra  $r$  y  $a_4$ .

A) **2; 61**      B) **3; 16**      C) **2; 16**  
 d) 3; 64      e) N.A.

6. Calcula la suma límite:

$$S = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \left(\frac{1}{3}\right)^4 + \dots$$

A) **1/3**      B) **2/3**      C) **1/2**  
 D) **1/17**      E) **N.A.**

7. El producto de tres números en P.G. es 27. ¿Cuál es el término central?

A) **1**      B) **3**      C) **6** D)  
 9      E) **18**

8. Interpola 3 medios geométricos entre -2 y **-512**.

A) **8, 32, 128**  
 b) **-8, 32, 128**  
 c) 8, 32, **-128**  
 d) -8, 32, **-128**  
 e) -8; -32, **-128**

9. Calcula la suma de los términos de la **PROGRESIÓN: 5, 5/2, 5/4, 5/8,...**

a) 5      b) 8      c) 9  
 D) **10**      E) **12**

10. Calcula la razón y el primer término de una P.A. en el cual  $a_3=3$  y el séptimo término es **3/16**.

A) **12; -1/2**  
 B) **12; 1/2**  
 C) **1/2; 12**  
 D) **1/2; -1/2**  
 e) **-1/2; 12**

11. En una P.G. si  $a_5=9$  y  $a_7=1$ , **ENTONCES**  $a_6$  vale:

a) 8      b) 5      c) 7  
 D) **3**      E) **1**

12. Encuentra "x" para que  $(x - 4)/2$ ;  **$X+2$**  Y  **$2(X-2)$**  estén en P.G.

a) 3      b) 2      c) 5  
 D) **1**      E) **N.A.**