Triángulo Educativo

Álgebra

4° SECUNDARIA

PROBLEMAS DE SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES

Sistemas

Es el conjunto de ecuaciones que verifican simultáneamente para los mismos valores de sus incógnitas.

SOLUCIÓN DE UN SISTEMA

Conjunto de valores de todas sus incógnitas que al ser sustituido en las ecuaciones las convierten en identidades.

Conjunto Solución (C.S.)

Es la unión de todas las soluciones de un sistema.

Ejemplo:

* $\begin{cases} x + y = 9 \\ x - y = 3 \end{cases}$

Solución: (6; 3)

C.S. = {(6; 3)}

* $\begin{cases} x^2 + y^2 = 13 \\ x \cdot y = -6 \end{cases}$

Solución: (3; -2)(-3; 2)(2; -3)
(-2; 3)

C.S. = {(3; -2)(-3; 2)(2; -3)
(-2; 3)}

Sistema de Ecuaciones Lineales

Es el sistema en el cual cada una de sus ecuaciones es de primer grado.

Ejemplo:

* $$\begin{aligned} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 &= d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 &= d_2 \\ a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 &= d_3 \end{aligned}$$

Solución: (r, s, t)

Incógnitas: x_1, x_2, x_3

Coeficientes: $a_1, a_2, a_3, ..., d_1, d_2, d_3$

Para resolver estos sistemas se utilizan generalmente los siguientes métodos:

1. Reducción (Gauss)
2. Sustitución
3. Igualación
4. Determinantes (regla de Cramer)
5. Matricial
6. Por gráfico

Sistema de dos Ecuaciones con dos incógnitas

Regla de Cramer:

Sea el sistema : $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

El conjunto solución es:

$$x = \frac{D\,x}{D\ \text{sistema}} \quad ; \quad y = \frac{D\,y}{D\ \text{sistema}}$$

donde:

D sistema = Determinante del sistema

D x = Determinante de x

D y = Determinante de y

$$D\ \text{sistema} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

$$D\,x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} = c_1b_2 - c_2b_1$$

$$D\,y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} = a_1c_2 - a_2c_1$$

= c b

Ejemplo:

Resuelve: $\begin{cases} 5x + 3y = 5 \\ 4x + 7y = 27 \end{cases}$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 27 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times 7 - 27 \times 3}{5 \times 7 - 4 \times 3}$$

$$= \frac{35 - 81}{35 - 12} = -2$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 4 & 27 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{5 \times 27 - 5 \times 4}{5 \times 7 - 4 \times 3}$$

$$= \frac{135 - 20}{35 - 12} = 5$$

CLASIFICACIÓN DE LOS SISTEMAS

1. Sistema Compatible

Es aquel sistema que admite por lo menos una solución. Estos sistemas pueden ser:

a. Sistema Compatible Determinado

Se conoce así cuando el número de soluciones es limitado, generalmente un sistema es de este tipo cuando el número de ecuaciones es mayor o igual al número de incógnitas.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 10y = 12 \\ 8x - 7y = 5 \end{array}\right\}$$

b. Sistema Compatible Indeterminado

Es cuando el número de soluciones es ilimitado; generalmente un sistema es de este tipo cuando el número de ecuaciones es menor que el número de incógnitas.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 10 \\ 2x + 3y + 5z = 20 \end{array}$$

2. Sistema Incompatible

Es aquel sistema que no admite solución.

Ejemplo:

$$\begin{array}{l} x + y + z = 9 \\ y - z + 2x = 9 \\ 2x - y = 1 \end{array}$$

ANÁLISIS GRÁFICO DEL SISTEMA

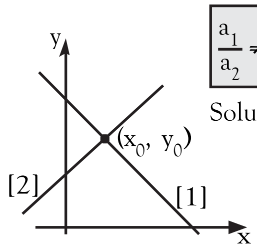
$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$$

1. Determinado

Si:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}}$$

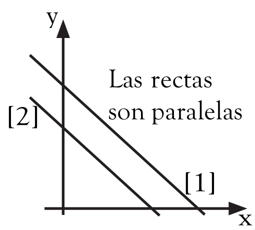
Solución única



2. Incompatible

Si:

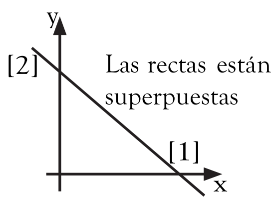
$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}}$$



3.Indeterminado

Si:

$$\boxed{\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}}$$



EJERCICIOS RESUELTOS

1. Resuelve:

$$\begin{array}{ll} 2x + 5y = -24 & \dots \text{ (I)} \\ 8x - 3y = 19 & \dots \text{ (II)} \end{array}$$

Resolución:

Si multiplicamos la ecuación (I) x 3 y (II) x 5; se obtiene:

$$\begin{array}{r} 6x + 15y = -72 \\ 40x - 15y = 95 \\ 46x = 23 \\ x = 23/46 \\ x = 1/2 \end{array}$$

Reemplazando en (I):

$$y = \frac{(-24 - 2(1/2))}{5}$$

$$y = \boxed{-5}$$

2. Resuelve:

$$5x + 2y = 4 \ \dots \ (I)$$
$$7x - 3y = -6 \ \dots \ (II)$$

Resolución:

Despejamos "x" de la ecuación (I)

$$x = \frac{4 - 2y}{5} \ \dots (III)$$

En la ecuación (II) reemplazamos (III) obteniendo:

$$7\left(\frac{4 - 2y}{5}\right) - 3y = -6$$

Resolviendo esta ecuación obtenemos: $y = 2$.

Para halla "x" en la ecuación (III) reemplazamos "y" por 2 obteniendo:

$$x = \frac{4 - 2(2)}{5} \rightarrow x = \boxed{0}$$

3. Luego de resolver:

$$4/m + 2/n = 6$$
$$3/m + 2/n = 5$$

indica $(m + n)$.

Resolución:

Sea $x = 1/m \wedge y = 1/n$

se tiene:

$$\begin{cases} 4x + 2y = 6 \ \dots \ (I) \\ 3x + 2y = 5 \ \dots \ (II) \end{cases}$$

Restando (II) de (I) se obtiene:

$$x = 1 \Rightarrow 1/m = 1$$
$$\Rightarrow m = 1$$

Reemplazando en II:

$$4(1) + 2y = 6$$
$$y = 1$$
$$1/n = 1$$
$$n = 1$$
$$\yen \ m + n = 1 + 1 = \boxed{2}$$

4. Si el sistema: $mx + ny = 3$

$$3x + 2y = 1$$

tiene infinitas soluciones, indica el valor de:

$$E = \frac{m - n}{3}$$

Resolución:

Si el sistema es compatible indeterminado, entonces se cumple:

$$m/3 = n/2 = 3/1$$

De donde $m/3 = 3 \Rightarrow m = 9$

$$n/2 = 3 \Rightarrow n = 6$$

Finalmente: $\dfrac{m - n}{3} = \dfrac{9 - 6}{3} = \boxed{1}$

5. Calcula "m" si el sistema es incompatible:

$$(m - 17)x - 20y = m - 13$$
$$3x + my = 2$$

Resolución:

Si el sistema es incompatible, entonces se cumple:

$$\frac{m - 17}{3} = \frac{-20}{m} \neq \frac{m - 13}{2}$$

De la igualdad:

$$m(m - 17) = -60$$
$$m^2 - 17m + 60 = 0$$
$$(m - 12)(m - 5) = 0$$

$$\yen \ m = 12 \vee m = 5$$

Pero $\dfrac{m - 13}{3} \neq \dfrac{-20}{m}$

$$\Rightarrow m^2 - 13m \neq -40$$

$$m^2 - 13m + 40 \neq 0$$
$$(m - 5)(m - 8) \neq 0$$

De ahí: $m \neq 5 \wedge m \neq 8$

Finalmente:

$$m = \boxed{12}$$

Resolviendo en clase

1 Resuelve:

$$7x + 8y = 29$$
$$5x + 11y = 26$$

Resolución:

Rpta:

2 Del sistema:

$$3(x + 2) - 3(y - 4) = 12$$
$$2(x - 3) + 4(y - 3) = 8$$

halla "$5x + y$".

Resolución:

Rpta:

3 Resuelve:

$$3x - 25 = 2y$$
$$3y + 5 = -2x$$

e indica "$x + y$".

Resolución:

Rpta:

4 El par (2; 1), verifica el sistema:

$$ax + by + 10 = 0$$
$$ax - by + 2 = 0$$

halla "$a - b$".

Resolución:

Rpta:

5 Dado:

$$nx + 3y = 2n + 3$$
$$2x + (n - 1)y = 4n - 6$$

determina el valor de "n" para que el sistema sea compatible indeterminado.

Resolución:

Rpta:

6 Resuelve:

$$\frac{x+1}{y} - 3 = 0$$
$$\frac{x}{y+1} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

indicando el valor de "x - y".

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. En el siguiente sistema:

$$ax + 2y = 12$$
$$6x - 5ay = -12$$

determina el valor de "a" de modo que "x" e "y" tengan el mismo valor.

8. ¿Para qué valores reales del parámetro "k" el sistema tiene solución única?

$$3x + (k - 2)y = k + 3$$
$$3x + 5y = 8$$

9. Dado el sistema:

$$3x + 2y = a + 2$$
$$2x - 3y = 2a - 1$$

determina el valor de "a" para que "x" valga el doble de "y".

10. Calcula el valor de "λ" en el sistema si el conjunto solución es: $\{(n+12; n)\}$

$$3x - 2y = \lambda$$
$$2x + 3y = \lambda$$

11. Halla "y" en:

$$2x + 5y = -24$$
$$8x - 3y = 19$$

12. Halla "y" en:

$$\frac{6}{x+2} - \frac{8}{y-3} = -2$$
$$\frac{9}{x+2} + \frac{2}{y-3} = 4$$

Para reforzar

1. Halla 3x + 3y si:

$$2x + 3y = 2000^2$$
$$x + 2y = 1999^2$$

a) 3 999 b) 1 333 c) 1 1997
d) 6 000 e) 1 999

2. Resuelve:

$$10x + 9y = 8$$
$$8x - 15y = -1$$

y da como respuesta "x + y".

a) -5/6 b) -1/6 c) 1/6
d) 5/6 e) 1

3. Resuelve:

$$x(3 + y) = y(5 + x) - 25$$
$$4(3 - y) = 2(x - 2) + 18 - 2y$$

a) (-3; 2) b) (5; -2) c) (-5; 2)
d) (-15/4; 11/4) e) (-3; 0)

4. Resuelve:

$$20/x - 12/y = 3$$
$$8/x + 30/y = 7$$

indica "x + 2y".

a) 10 b) 16 c) 12
d) -4 e) 20

5. Halla el valor de "m" para que el sistema no tenga solución.

$$(5m + 1)x + (5m + 2)y = 7$$
$$(3m - 2)x + (3m - 1)y = 4$$

a) 0 b) -1/2 c) -3/2
d) 3/2 e) 1/2

6. Halla (m + n) para que el sistema sea compatible indeterminado.

$$5x + 3y = 1$$
$$mx - ny = 4$$

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 10

7. ¿Qué valor debe tener "a" para que "x" sea igual a "y" en el siguiente sistema?

$$ax + 4y = 119$$
$$5x - ay = 34$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

8. Si el sistema es compatible indeterminado, calcula a + b.

$$(a - 3)x + (b - 2)y = 8$$
$$(a + 1)x + (b + 4)y = 24$$

a) 9 b) 7 c) 10
d) 13 e) 5

9. Si el par ordenado que verifica:

$$nx + y = 4$$
$$y + mx = 2$$

es (1; 2), halla "n^m".

a) 1 b) 2 c) 0
d) -1 e) -2

10. Resuelve:

$$3x - 2y + 1 = 0$$
$$7y + z - 4 = 0$$
$$2x + 4z + 3 = 0$$

si (x, y, z) es solución del sistema. Calcula el valor de:

a) -1 b) 3 c) 5
d) 0 e) 1

11. La suma de dos números es 191. Si el mayor se divide por el menor, el cociente es 4 y el residuo es 16. Entonces la diferencia positiva de dichos números es:

a) 100 b) 102 c) 121
d) 132 e) 156

12. Resuelve:

$$2(x + a) - \frac{y}{b} = 2a$$

$$bx + y - 2b = -b$$

indicando el valor de "y".

a) 1 b) 2 c) 2b/3
d) b/3 e) b/4