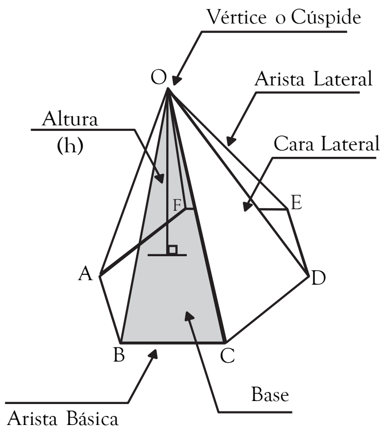
PIRAMIDE Y CONO

PIRÁMIDE

Es el poliedro donde una de sus caras es una región poligonal cualquiera denominada base y sus otras caras son regiones triangulares que tienen un vértice en común. Una pirámide se nombra según la cantidad de lados que tenga la base; por ejemplo: si la base tiene seis lados, se denomina pirámide hexagonal.



A) Pirámide Regular

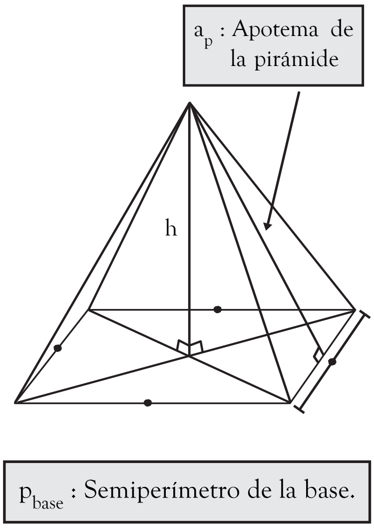
Es la pirámide de base regular que tiene sus caras laterales congruentes. Estas condiciones originan que en dicha pirámide las aristas laterales tengan longitudes iguales y el pie de la altura sea el centro de la base.

Área lateral (A_L):

$$\boxed{A_L = (p_{base}) \cdot a_p}$$

Área total (A_T):

$$\boxed{A_T = A_L + A_{base}}$$

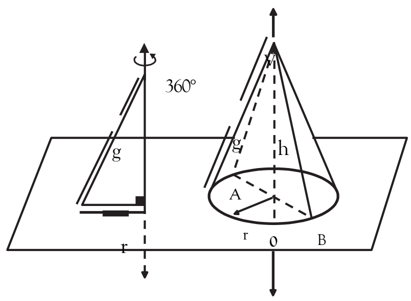


CONO

Es el sólido limitado por una superficie cónica cerrada y un plano secante a ella que interseca a todas las generatrices de una misma hoja.

A) Cono Circular Recto o de Revolución

Es aquel cono recto cuya base es un círculo. También se denomina cono de revolución, porque se genera con una región triangular rectangular al girar una vuelta en torno a un cateto.



En el gráfico, se muestra un cono de revolución.

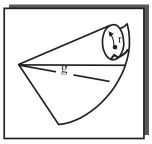
$\overline{VO}$: Altura del cono ($VO = h$)
$\overrightarrow{VO}$: Eje del cono.

$$\boxed{V = \frac{\pi r^2 h}{3}}$$

B) Desarrollo de la Superficie Lateral de un Cono de Revolución

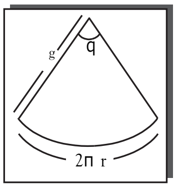
El desarrollo de la superficie lateral de un cono de revolución es un sector circular cuyo radio es igual a la longitud de la generatriz de dicho cono, y cuyo arco tiene igual longitud que la circunferencia que limita la base.

En el gráfico, se muestra un cono de revolución y el desarrollo de su superficie lateral.



θ : Medida del ángulo de desarrollo.

$$\boxed{\theta = \frac{r}{g}(360°)}$$



Área lateral (A_L).

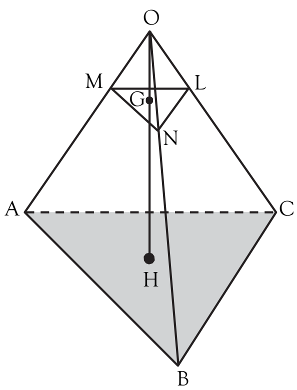
$$\boxed{A_L = \pi rg}$$

Área total (A_T).

$$\boxed{A_T = \pi r(g+r)}$$

PIRÁMIDES SEMEJANTES

Si se traza un plano paralelo a la base ABC de una pirámide O - ABC, ésta determinará una sección MNL (sección transversal), la cual será base de otra pirámide O - MNL semejante a la primera.



$\Delta MNL \,//\, \Delta ABC$

$$\boxed{\text{Pirámide O-ABC} \sim \text{Pirámide O-MNL}}$$

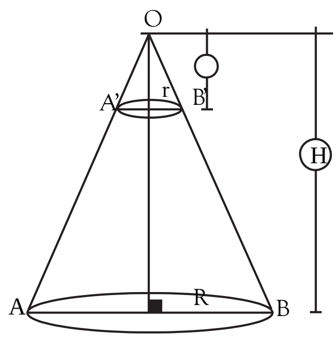
Se cumple:

1. $$\frac{OA}{OM} = \frac{OB}{ON} = \frac{OC}{OL} = \frac{OH}{OG}$$

2. $$\frac{\text{Área de (O-ABC)}}{\text{Área de (O-MNL)}} = \frac{OA^2}{OM^2} = \frac{OB^2}{ON^2} = \frac{OC^2}{OL^2} = \frac{OH^2}{OG^2}$$

3. $$\frac{\text{Volumen de (O-ABC)}}{\text{Volumen de (O-MNL)}} = \frac{OA^3}{OM^3} = \frac{OB^3}{ON^3} = \frac{OC^3}{OL^3} = \frac{OH^3}{OG^3}$$

Así como en las pirámides semejantes, también para los conos semejantes se cumplen las siguientes relaciones:



1. $$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{R}{r} = \frac{H}{h}$$

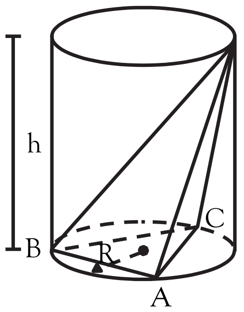
2. $$\frac{\text{Área del Cono Mayor}}{\text{Área del Cono Menor}} = \frac{(OA)^2}{(OA')^2} = \frac{(OB)^2}{(OB')^2} = \frac{R^2}{r^2} = \frac{H^2}{h^2}$$

3. $$\frac{\text{Volumen del Cono Mayor}}{\text{Volumen del Cono Menor}} = \frac{(OA)^3}{(OA')^3} = \frac{(OB)^3}{(OB')^3} = \frac{R^3}{r^3} = \frac{H^3}{h^3}$$

Ejercicios Resueltos

1) El volumen de un cilindro de revolución es $12\sqrt{3}\ m^3$. Calcula el volumen de una pirámide cuya base es un triángulo equilátero inscrito en la base del cilindro y cuyo vértice está en la circunferencia de la otra base.

Resolución:



$V_{cil} = \pi R^2 h = 12\sqrt{3}\pi$

$\Rightarrow R^2 h = 12\sqrt{3}$ (1)

$V_{pir} = \dfrac{1}{3} S_{ABC} \times h$ (2)

$S_{ABC} = \dfrac{(AB)^2\sqrt{3}}{4}$

$AB = R\sqrt{3} \Rightarrow S_{ABCD} = (R\sqrt{3})^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

En (2):

$V_{pir} = \dfrac{1}{3} . 3R^2 \times \dfrac{\sqrt{3}}{4}h$

$V_{pir} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}R^2h$

De (1):

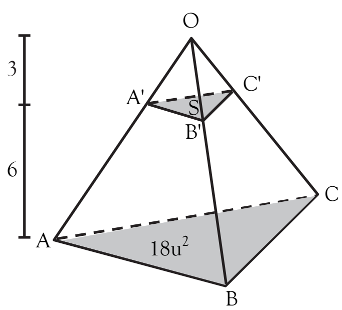
$V_{pir} = \dfrac{\sqrt{3}}{4} . 12\sqrt{3}$

$V_{pir} = 9\ m^3$

Rpta.:= $9\ m^3$

2) En una pirámide triangular, el área de su base es $18\ u^2$ y la altura 9 u; a la tercera parte de la altura a partir del vértice se traza un plano secante paralelo a la base. Calcula el volumen del tronco de pirámide determinado.

Resolución:



$V_{TP} = \dfrac{H}{3}[18+S+\sqrt{18.S}]$ (1)

O - A'B'C' ~ O - ABC

$\Rightarrow \dfrac{S}{18} = \dfrac{(3)^2}{(9)^2} \Rightarrow S = 2u^2$

$H = 6$

$\therefore$ En (1):

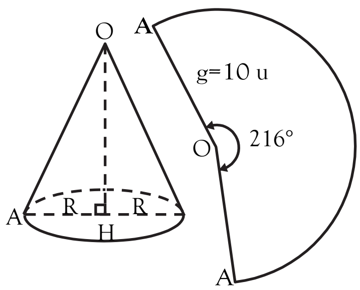
$V_{TP} = \dfrac{6}{3}[18+2+\sqrt{18\times 2}]$

$V_{TP} = 2\,[26]$

$V_{TP} = 52\ u^3$ Rpta.:= $52\ u^3$

3) La generatriz de un cono recto mide 10 u y que al desarrollar su superficie lateral resulta un sector circular de 216° de ángulo central. Calcula el volumen del cono.

Resolución:



$V_C = \dfrac{\pi R^2 h}{3}$ (1)

Superficie lateral del cono = $S_{\text{sector circular}}$

$\pi Rg = \pi \dfrac{g^2}{} \Rightarrow R = \dfrac{3}{5}g$

$\Rightarrow R = \dfrac{3}{5}(10) \Rightarrow R = 6$

En $\triangle$ AHO: $g = 10$; $R = 6 \Rightarrow h = 8$

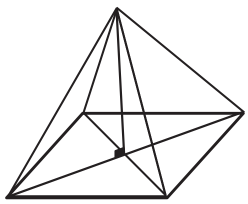
En (1):

$V_C = \dfrac{\pi (6)^2 \times 8}{3}$

$V_C = 96\pi\ u^3$ Rpta.:= $96\pi\ u^3$

Resolviendo en clase

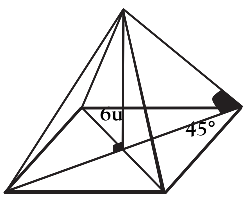
1 Calcula el volumen de la pirámide cuadrangular regular cuya arista básica es $\sqrt{2}$u y su altura 6u.



Resolución:

Rpta:

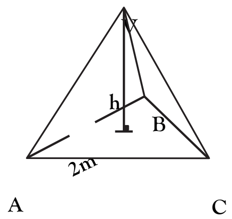
2 Del gráfico, calcula el volumen de la pirámide de base cuadrangular regular.



Resolución:

Rpta:

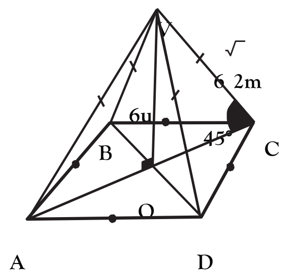
3 Calcula el volumen de la pirámide triangular regular, si la altura es igual al semiperímetro de
la base y AB = 2m.



Resolución:

Rpta:

4 Del gráfico, calcula el volumen de la pirámide cuadrangular regular.



Resolución:

Rpta:

5 **El área lateral de una pirámide regular es 180 cm^2 y el apotema de la pirámide mide 10cm. Calcula el perímetro de la base.**

***Resolución*:**

Rpta:

6 **Halla el área total de un cono de revolución de 13cm de generatriz y 12cm de altura.**

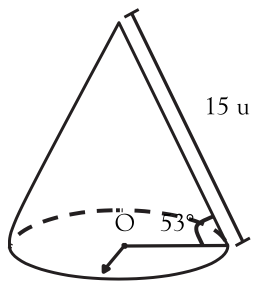
***Resolución*:**

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. El área de la superficie total de un cono de revolución es 24π u^2 y su generatriz mide 5u. Calcula el volumen de dicho cono.

8. Halla el área total del siguiente cono recto.



9. El volumen de un cono circular recto es 324π cm^3. Si el radio de la base mide 9cm; la generatriz del cono mide:

10. Una pirámide de $\sqrt[3]{32}$u de altura es cortada por un plano paralelo a la base determinando un tronco de pirámide cuyo volumen es el triple de la pirámide parcial determinada. ¿A qué distancia del vértice de la pirámide se ha trazado el plano?

11. El desarrollo de la superficie lateral de un cono circular recto es un sector de 120°. Calcula en qué relación está el radio de la base con la generatriz.

12. La generatriz de un cono recto mide 5m y la superficie lateral desarrollada forma un sector circular de 216° de ángulo central. Calcula el volumen de dicho cono.

Para reforzar

1. La base de una pirámide regular es un cuadrado de 6m de lado. Si las aristas laterales también miden 6m, ¿cuál es el área total de dicha pirámide?

a) $18(\sqrt{3}+1)m^2$ b) $36(\sqrt{3}+1)m^2$
c) $72(\sqrt{3}+1)m^2$
e) $34(\sqrt{3}+1)\ m^2$ e) N.A.

2. La base de una pirámide regular es un cuadrado de lado 3u y su altura es 5u. Halla el volumen del sólido.

a) 45 u^3 b) 30 u^3 c) 15 u^3
d) 20 u^3 e) 24 u^3

3. Calcula la arista básica de una pirámide cuadrangular regular de 156 u^2 de área total y 10 u de apotema.

a) 4 u b) 5 u c) 6 u
d) 8 u e) 10 u

4. El volumen de una pirámide hexagonal regular, cuya arista lateral mide 6u y forma un ángulo de 30° con la base es:

a) 35,1 u^3 b) 40,1 u^3 c) 55,1 u^3
d) 70,1 u^3 e) 29,6 u^3

5. Si el área lateral de un cono recto es el doble del área de su base, calcula la medida del ángulo que forma la generatriz con la altura.

a) 10° b) 30° c) 45°
d) 60° e) 75°

6. Se tiene un cono cuyo volumen es igual al de un cubo de 24cm^2 de área total. Determina el volumen del cono.

a) 6 cm^3 b) 9 cm^3 c) 8 cm^3
d) 8/3 cm^3 e) 83/17 cm^3

7. El volumen de un cono circular recto de 32m de diámetro es 1024π m^3. Halla el área total del cono.

a) 576π m^2 b) 320π m^2 c) 432π m^2
d) 288π m^2 e) 360π m^2

8. ¿A qué distancia del vértice debe cortarse un cono de 10cm de altura por un plano paralelo a la base para que resulten dos partes equivalentes?

a) $4\sqrt[3]{4}$ cm b) $3\sqrt[3]{4}$ cm c) $5\sqrt[3]{4}$ cm
d) $2\sqrt[3]{4}$ cm e) $\sqrt[3]{4}$ cm

9. Calcula el área lateral de un cono que se genera al girar un triángulo rectángulo isósceles de área 12cm^2 alrededor de una cateto.

a) 24π cm^2 b) $12\pi\sqrt{2}cm^2$ c) 12π cm^2
d) $24\pi\sqrt{3}cm^2$ e) n.a.

10. Halla el volumen de una pirámide triangular regular cuya base tiene 6cm de lado y además la altura de la pirámide mide $8\sqrt{3}$cm.

a) 72 cm^3 b) 108 cm^3 c) 140 cm^3
d) 156 cm^3 e) 204 cm^3

11. El área lateral de un cono de revolución es 60π cm^2 y su generatriz mide 12cm. Halla la longitud de la circunferencia de la base.

a) 10π cm b) 8π cm c) 5π
d) 6π cm e) N.A.

12. El área total de un cono es 200π m^2, y el producto de la generatriz y el radio es 136m^2. Calcula su volumen.

a) 165π m^3 b) 180π m^3 c) 230π m^3
d) 285π m^3 e) 320π m^3