Triángulo Educativo

Álgebra

5° SECUNDARIA

NOCIONES BASICAS DE LAS FUNCIONES

IDEA DE FUNCIÓN

El concepto de función es una de las ideas fundamentales en la matemática. Casi cualquier estudio que se refiere a la aplicación de la matemática a problemas prácticos o que requiere el análisis de datos emplea este concepto matemático que te explicaré a continuación:

Por ejemplo, las compañías como Luz del Sur o Edelnor tienen como unidad de medida para facturar sus recibos el kilowatt - hora (kw - h). El (kw - h) indica cuántos kilowatts se han consumido de electricidad en casa. El kw - h cuesta S/. 2.

Supongamos que hoy papá nos dice que vayamos a pagar el recibo mensual de luz. En el camino observas que el monto a pagar es de S/. 80, entonces tú rápidamente haces cálculos. Si por 1kw - h nos cobran 2 soles, ¿cuántos kw - h consumimos en casa?

1 kw - h ——— S/. 2
x kw - h ——— S/. 80

Rpta.: x = 40 kw - h

Ahora piensas y dices: Si hubiera consumido 30 kw - h, ¿cuánto habríamos pagado?, realizas otra regla de tres y el resultado es S/. 60. Es decir, nos damos cuenta de que entre lo que pagamos y lo que consumimos existe una relación.

Si consumes más, pagas más; si consumes menos, pagas menos.

También podemos decir que el pago que efectuamos depende de la electricidad que consumimos, o el pago está en función de la electricidad que consumimos.

Este ejemplo es uno de los muchos que existen cuando hablamos de función.

Aquí algunos más que aclaran la idea:

- El área de un círculo depende o está en función de la longitud de su radio.
- Las cuentas mensuales de agua y electricidad dependen de la cantidad de agua o electricidad que se utilicen.
- El desarrollo muscular y la firmeza de un cuerpo dependen de los ejercicios físicos que se practiquen.

Esta idea nos ayudará a entender el siguiente marco teórico.

FUNCIONES

❖ **Par Ordenado**

Es un conjunto formado por dos elementos dispuestos en determinado orden:

(a , b)

Primera componente ⌋ ⌊ Segunda componente

Propiedades:

1. (a,b) ¯(b,a) (no conmutativa)
2. Si (a,b) = (c,d) a = c ∍ b = d

❖ **Producto cartesiano**

Dado dos conjuntos "A" y "B" no vacíos, se llama producto cartesiano (A x B) al conjunto de pares ordenados (a , b) donde a A y b B, es decir:

A x B = {(a , b)/a A ∍b B}

Ejemplo:

Sea: A = {1 ; 2 ; 3 }
B = {2 ; 3 ; 4 }

A x B = {(1; 2), (1; 3), (1; 4), (2; 2), (2; 3), (3; 2), (3; 3), (3; 4)}

Propiedades:

1. n(A x B) = n(B x A)
2. n(A x B) = n(A) x n(B)

❖ Relación

Dados dos conjuntos “A” y “B” no vacíos, se llama relación de “A” en “B” a todo subconjunto “R” del producto cartesiano “A x B”, es decir, “R” es una relación de “A” en “B” ⇔ “R” ⊂ “A x B”.
En particular, si A = B, “R” se llama relación en “A” (relación entre elementos de “A”).
La definición anterior de relación exige la comparación de elementos pares por eso suele llamarse “relaciones binarias”.

Ejemplo:

En el conjunto:

$$A = \{9 ; 8 ; 7 ; 6 ; 5 ; 4 ; 3 ; 2 ; 1\}$$

establecemos las siguientes relaciones, respectivamente:

R_1 = {(a,b)/ “a” es el doble de “b”}
= {(2;1), (4 ; 2) , (6 ; 3) , (8 ; 4)}

R_2 = {(a,b)/ “a” es igual a “b”}
= {(1;1), (2 ; 2) , (3 ; 3) , (4 ; 4) , (5 ; 5), (6 ; 6) , (7 ; 7) , (8 ; 8) , (9 ; 9)}

- Si “R” es una relación entre elementos de “A” y “B”, al conjunto “A” se le llama conjunto de partida de la relación y a “B” conjunto de llegada.

- Se llama Dominio de una relación “R” al conjunto de todos los elementos (a ∈ A) tales que existe por lo menos un b ∈ B con (a, b) ∈ R.

- Se llama Rango de una relación “R” al conjunto de todos los elementos (b ∈ B) tales que existe por lo menos un a ∈ A con (a, b) ∈ R.

Ejemplo:

Sea la relación:

R_1 = {(1;2) , (2 ; b) , (2;7) , (3 ; 2) , (1 ; -2)}

$\Rightarrow \quad D_{R_1} = \{1 ; 2 ; 3\}$

$\quad\quad R_{R_1} = \{2 ; b ; 7 ; -2\}$

DEFINICIÓN DE FUNCIONES

Sean “A” y “B” dos conjuntos no vacíos (pudiendo ser A = B), llamaremos función definida en “A” a valores en “B” (función de “A” en “B”) a toda la relación:

F ⊂ A x B

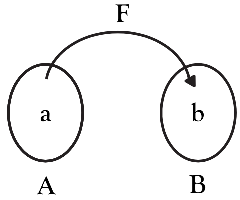
que tiene la propiedad:

Si (a,b) ∈ F y (a , c) ∈ F; entonces b = c.

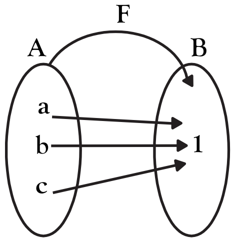
Es decir, una función es un conjunto de pares ordenados de elementos, tal que, ***dos pares distintos nunca tienen el mismo primer elemento.***

Notación:
Si “F” es una función de “A” y “B”, se designa por:

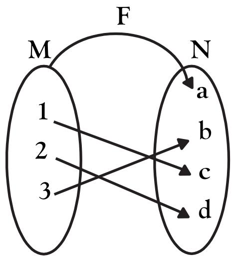
F : A → B



Se lee: “F” es una función de “A” en “B”. Ejemplos:

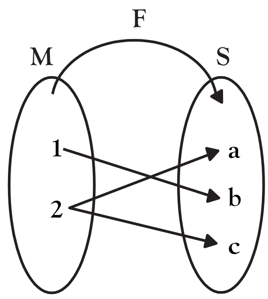


Siendo a ≠ b ≠ c, diremos $A \xrightarrow{F} B$
F = {(a;1) , (b;1) , (c ; 1)} es función.



$M \xrightarrow{F} N$

F = {(1;c) , (2;d) , (3 ; b)} es función.



$M \xrightarrow{F} S$

F = {(1;b) , (2;a) , (2 ; c)}

- Si a ≠ b ≠ c, entonces no es función porque se repite el primer elemento.

- Si a = c ≠ b, entonces es función.

Ejemplo:

Halla los valores de "a" y "b" para que el conjunto de pares ordenados:
$F = \{(2, 5) ; (-1, -3) ; (2, 2a - b) ; (-1, b - a)\}$ sea una función.

Resolución:

En una función dos pares distintos nunca tiene el mismo primer elemento.

$$\therefore (2;5) \text{ y } (2 ; 2a-b) \quad A\square\ 5 = 2a-b \ ...(1)$$

$$(-1 ; -3) \text{ y } (-1 ; b-a) \quad A\square\ b-a = -3 \ ...(3)$$

De (1) y (2), resolviendo: $a = 2 ; b = -1$

- Si "F" es una función de "A" en "B", el conjunto "A" se llamará conjunto de partida de la función y "B' el conjunto de llegada.

- El dominio de una función "F" se designa por "D_F" y se define como el conjunto siguiente:

$$\boxed{D_F = \{x \ A/ \ \ y; \text{tal que } (x, y) \ \ F\}}$$

- El rango (o imagen) de una función "F" se designa por "R_F" o "Im_F" y se define como el conjunto siguiente:

$$\boxed{R_F = \{y \ B/ \ \ x; \text{tal que } (x, y) \ \ F\}}$$

es decir, son las segundas componentes de los pares ordenados.

- Si el par ordenado (a,b) F escribiremos $b = F(a)$ y diremos que "b" es imagen de "a" por "F" (o también, que "b" es el valor de "F" en "a").

$$\boxed{F = \{(a, b) \ \ AxB / b = F_{(a)}; \ a \ \ D_F\}}$$

Ejemplo:

Sea la función:

$$F = \{(2;3) \ , (3 ; 4) , (7 ; 3) , (-2 ; 6) , (4 ; 1)\}$$

Halla :

$$M = F_{(2)} + F_{(3)} + F_{(7)} + F_{(-2)} + F_{(4)}$$

Resolución:

Como:

$F_{(2)} = 3; F_{(3)} = 4; F_{(7)} = 3; F_{(-2)} = 6; F_{(4)} = 1$
$\therefore M = 17$

❖ Regla de correspondencia

Para que se pueda definir bien una función, es suficiente conocer su dominio (D_F) y una regla que permita asignar, para cualquier x D_F, su imagen $F_{(x)}$.

Ejemplo:

1) Halla el dominio de las siguientes funciones:

a. $F = \{(2 ; 3) , (4 ; 5) , (6 ; 3) , (-2 ; a)\}$

$D_F = \{2 ; 4 ; 6 ; -2\}$

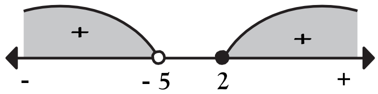
b. $F_{(x)} = \sqrt{x - 2}$

$D_F = x - 2 \ \varepsilon \ 0; x \ \varepsilon \ 2$

$D_F = [2 ; + \ \ *$

c. $F_{(x)} = \sqrt{\dfrac{x-2}{x+5}} + \dfrac{x}{x-3}$

$D_F = \dfrac{x-2}{x+5} \ \varepsilon \ 0 \ \ni \ x - 3 \ \bar{} \ 0$



$D_F =) - \ \ ; \ - 5 * * [2 ; \ - \ \ * - \{3\}$

2) Halla el rango de las siguientes funciones:

a. $F = \{(2 ; 3), (4 ; 6), (5 ; 7), (7 ; 6) (-2 ; 3)\}$

$R_F = \{3 ; 6 ; 7\}$

b. Sea: $F_{(x)} = x^2$

$y = x^2 \ \square\ x \ \ IR; y \ \ IR^+ * \{0\}$

$D_F =) - \ \ ; + \ \ * ; R_F = [0 ; + \ \ *$

Tenemos varias formas de hallar rangos, presentaremos las más conocidas:

- Cuando tenemos una función donde su dominio no presenta rango, se despeja "x" en función de "y".

- Cuando tenemos un intervalo como dominio, usamos desigualdades.

c. Para la función definida por:

$H_{(x)} = x^2 - 4x + 7 ; x \ \ [2 ; 3]$ halla el rango.

Resolución:

$y = x^2 - 4x + 7$

□ $y = (x - 2)^2 + 3$

como: $2\ \delta\ x\ \ \delta\ 3$

□ $0 < x - 2 < 1$

al cuadrado:

$$0\ \delta\ (x - 2)^2\ \delta\ 1$$

más tres:

$3\ \delta\ (x - 2)^2 + 3\ \delta\ 4$ □ $3\ \delta\ y\ \delta 4$

$\therefore [3 ; 4]$

❖ Gráfica de una función

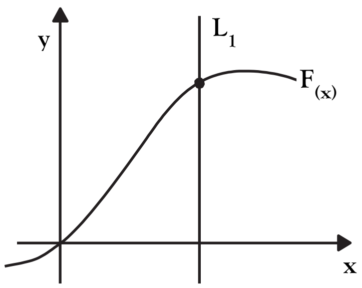
Sea "F" una función real, la gráfica de "F" es el conjunto "G" de todos los puntos (x , y) en el plano, tal que "x" está en el dominio de "F" e "y" es la imagen de "x" por "F"; es decir:

$$G= \{(x,y)\quad R^2 / y = F_{(x)};\ x\quad D_F\}$$

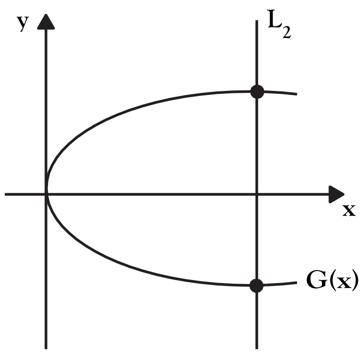
□ Una gráfica cualquiera será función, si y sólo si, al trazar una paralela al eje "y" corta a la gráfica en un solo punto.

Ejemplo:

a. $F_{(x)}$ es una función, entonces "L_1", la recta paralela al eje "y", corta a la gráfica en un solo punto.



b. $G_{(x)}$ no es función entonces "L_2", la recta paralela al eje "y", corta a la gráfica en más de un punto.



Ejercicios Resueltos

1. Calcula "n" en la función:

$$F = \{(7; 9)\ , (n\ ; 2)\ , (3\ ; 4)\ , (7\ ; n^2)\}$$

Resolución:

Dos pares distintos no tienen la primera componente, entonces:

$$(7\ ;\ 9)\ (7\ ;\ n^2)\quad F$$

□ $9 = n^2$ □ $n = 3$ (no cumple)

n = -3 (cumple con la función)

2. Indica la suma de los elementos del rango de la función:

$$F_{(x)} = 3x + 1$$

siendo el dominio:

$$D_F = \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$$

Resolución:

Para:

$x=1$□ $F_{(x)} = 4$ $\quad$ $x=3$□ $F_{(x)} = 10$

$x=2$□ $F_{(x)} = 7$ $\quad$ $x=4$□ $F_{(x)} = 13$

Luego, suma los elementos del rango:

$$4 + 7 + 10 + 13 = 34$$

3. Halla el dominio de la función

$F(x) = \sqrt{x + 1} + \sqrt{1 - x}$

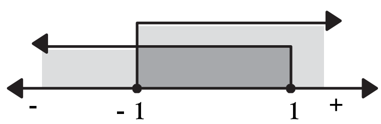
siendo el dominio: $D_F = \{1; 2 ; 3 ; 4\}$

Resolución:

$$D_{(F)} = x + 1\ \varepsilon\ 0 \ni 1 - x\ \varepsilon\ 0$$

$$x\ \ \varepsilon\ -1 \ni 1 \varepsilon\ x$$

Luego:



$$D_F = x\quad [-1 ; 1]$$

4. Halla el dominio y rango de la siguiente función:

$$F_{(x)} = -\frac{x}{2} + 3$$

Resolución:

□ $D_F = R$

□ R_F = despejar "x" en función de "y".

$y - 3 = \frac{-x}{2}$□$-x = 2y - 6$□$x = 6 - 2y$

Luego: $y\quad R$

Resolviendo en clase

1 Si se tiene:

$A = \{(\sqrt{5};\ 3),\ (\sqrt{4};\ 1),\ (5;\ 4)\}$
$B = \{(2;\ 7),\ (5;\ \sqrt{49}),\ (3;\ 7)\}$
$C = \{(1;\ 4),\ (3;\ 5),\ (7^0;\ 2)\}$

entonces:

a) B no es función
b) A es función
c) A y C son funciones
d) A y B no son funciones
e) A y C no son funciones

Resolución:

Rpta:

2 Si el conjunto:

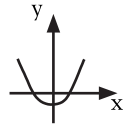
J = (8; x), (5; 3), ;5 ,(8; 2x-3)

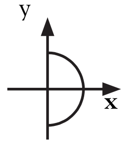
es una función, entonces el valor de "x" es:

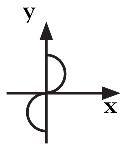
Resolución:

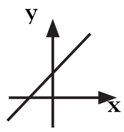
Rpta:

3 ¿Cuáles de los siguientes gráficos corresponden a funciones?

a) 

b) 

c) 

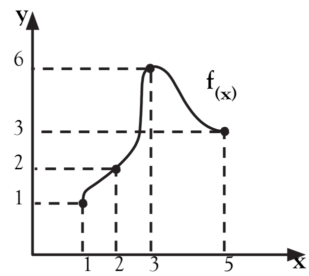
d) 

e) a y c

Resolución:

Rpta:

4 Del gráfico:



halla: $J = \frac{f_{(5)} + f_{(1)}}{f_{(2)} + f_{(3)}}$

Resolución:

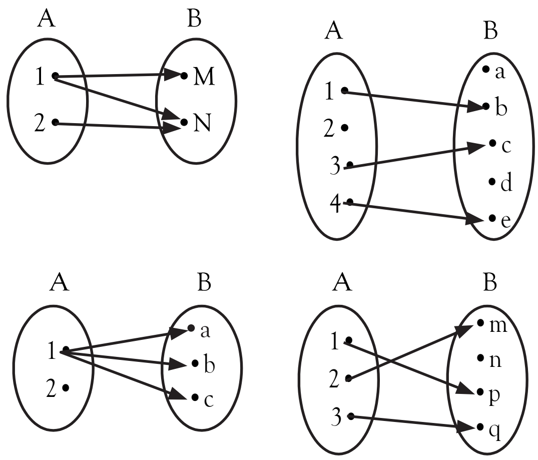
Rpta:

5 Siendo $F_{(x)} = ax + b$, halla "$F_{(a)} \cdot F_{(b)}$", sabiendo que (1; 5) y (-1; 1) pertenecen a "F".

Resolución:

Rpta:

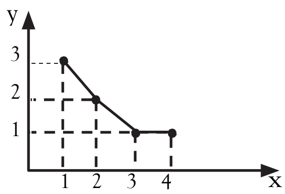
6 ¿Cuáles de los siguientes gráficos no representan una función? ¿Por qué?



Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Según el gráfico:



halla: $\dfrac{f_{(1)} + f_{(2)} + f_{(3)}}{f_{(3,5)} + f_{(3,6)}}$

8. Dada la función F con la siguiente regla de correspondencia

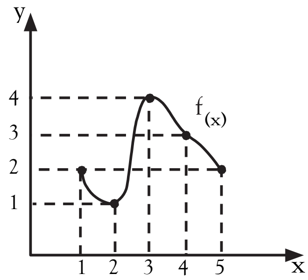
$F(x) = x^2 + ax + b$

Si $F(0) = 3 \ni F(2) = 5$, indica el valor de F(4).

9. Determina el valor de:

$$\frac{f_{(f(1))} + f_{(f(3))}}{f_{(5)}}$$

sabiendo que para la función tenemos:



10. Halla el área de la región triangular que forma la función

$F(x) = 2x - 6$ con los ejes coordenados.

11. Sea $f_{(x)}$ una función definida por:

$f=\{(a;b), (3;e), (1; 3),(2b;4)\}$
$f(x) = x - 2a$

Halla "abc".

12. Dada la función "F", tal que:

$$F_{(4)}=1;\ 2F_{(2)} = 3F_{(3)}$$

Además: $F_{(x)}= ax+b$; luego podemos afirmar:

Para reforzar

1. Indica cuáles de los siguientes conjuntos determinan una función:

$A = \{(2;3), (5; 7), (1; 4)\}$
$B = \{(4; 1), (9; 8), (3; 6)\}$
$C = \{(2; 3), (1; 7), (3; 5)\}$

a) Sólo A
b) Sólo B
c) Sólo C
d) Ninguno
e) Todos

2. Dados los conjuntos:

$M = \{(\ 16; 5), (7; 4), (-4;5)\}$

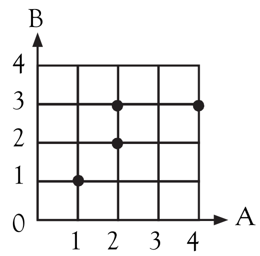
$N= \ (3^0;7), \ 6; \ \ , (-3)^0;4$

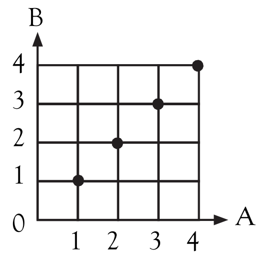
$P = (\ 49; 6), \ 1; \ \ ,(7; \ 36)$

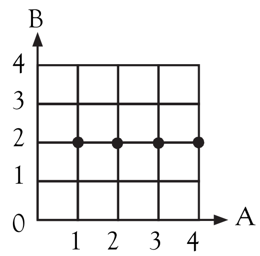
Entonces:

a) M no es función
b) N y P son funciones
c) N es función
d) P es función
e) M y P no son funciones

3. ¿Cuáles de los siguientes gráficos no representan una función? ¿Por qué?

a)


b)


c)


4. Sea "f" una función:
$f = \{(1;2), (2;a), (3;b), (4;5)\}$ y
$f_{(x)} = cx + d$,

halla "a+b+c+d".

a) 5 b) 7 c) 9
d) 11 e) 13

5. Si la expresión:

$F = \{(a,4); (1,7); (a,b); (1,a)\}$

es una función, indica el valor de $a^2 - b^2$.

a) 41 b) 23 c) 33
d) 19 e) 6

6. Sea $f_{(x)}$ una función lineal, tal que:

$f_{(x+1)} = 3x + 8$

Halla la ordenada del punto de la abscisa 8.

a) 13 b) 1 c) 29
d) 15 e) 18

7. Definida la función:

$$f_{(x)} = \begin{cases} 2x - 7; \text{ si } x > 3 \\ x + 1; \text{ si } x \leq 3 \end{cases}$$

marca la alternativa correcta:

a) $f_{(1)} = -5$ b) $f_{(0)} = 1$ c) $f_{(4)} = 9$
d) $f_{(3)} = -1$ e) $f_{(5)} = 6$

8. Apartir de la función:

$H = \{(a+1;3), (2a-1; a), (a+1; 2a - 7), (9;b - 3), (b; a - 1)\}$ Halla: $H_{(a+4)} + H_{(b-2)}$

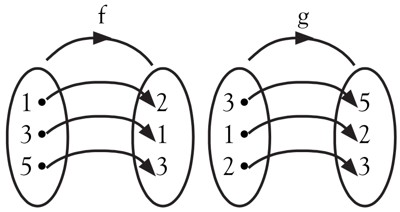
a) 3 b) 9 c) 8
d) 6 e) 4

9. Se tiene la función $F(x) = ax+b$ además
$F(-1)= 11 \ni F(1) = 3$

Indica el valor de: $F(3a + 2b)$

a) 0 b) 1 c) -1
d) 2 e) -2

10. Dadas las funciones "f" y "g" definidas por:



halla:

$$\frac{f_{(1)} + g_{(3)}}{f_{(g(2))} + f_{(g(3))}}$$

a) 1 b) 2 c) $\frac{7}{4}$
d) 4 e) $\frac{21}{2}$

11. Dada las funciones:

$F = \{(2, 3); (5, 4); (9, 3)\}$
$H = \{(3, 5); (4, 9); (5, 12)\}$

Calcula:

$$\sqrt[F(5)]{F(H(3)) + H(H(3))}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

12. Calcular el área definida por las funciones: $f(x) = 2x + 10$, $g(x) = -x + 1$ y los ejes coordenados.

a) $6u^2$ b) $8u^2$ c) $9u^2$
d) $10u^2$ e) $12u^2$