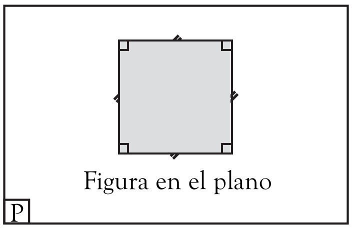
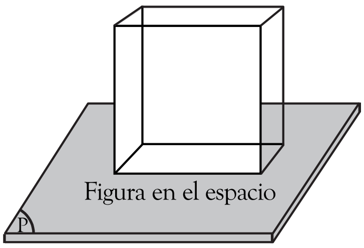
NOCIONES BASICAS DE GEOMETRIA DEL ESPACIO

INTRODUCCIÓN

Hasta el momento conocemos figuras geométricas ubicadas sólo en un plano, tales como el triángulo, el cuadrilátero, el círculo, etc. Sin embargo, en nuestra vida cotidiana observamos que en nuestro entorno existen objetos que no están ubicados en un solo plano; tales como una caja, una columna, un edificio, etc. Esto nos hace ver la necesidad de analizar la forma y extensión de los objetos ubicados en el espacio, lo cual se puede hacer representándolos mediante figuras geométricas espaciales denominados "sólidos geométricos", para esto también será necesario tener un manejo adecuado de las rectas, planos, ángulos diedros, etc., y sobre todo paciencia, orden y perseverancia por parte del alumnado.





Conceptos previos

A) Punto

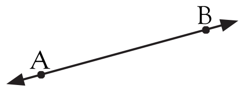
Representación gráfica de un punto.

Notación.- Punto A

B) RECTA

Representación gráfica de una recta.

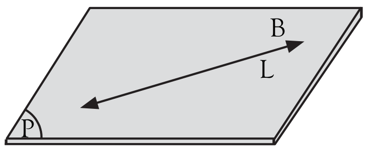
Notación.- Recta L: $\overline{L}$



Notación.- Segmento de recta AB o $\overline{AB}$

C) PLANO

Se denomina superficie plana o plano a una superficie tal que la recta que une a dos puntos cualesquiera tiene todos sus otros puntos en la misma superficie. Todo plano se supone de extensión ilimitada. La mayor parte de los objetos planos que observamos son porciones de plano de forma rectangular; por esta razón y ante la imposibilidad de representar los planos indefinidos adoptaremos la representación convencional por regiones paralelográmicas que es el aspecto que tiene aproximadamente los rectángulos vistos en perspectiva desde cierta distancia.



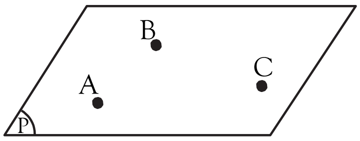
Notación.- Plano P: ▱P

Determinación de un plano

Un plano "P" queda determinado por uno de los cuatro casos.

1. Teorema

Tres puntos no colineales determinan un plano.

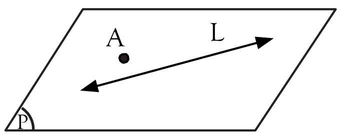


Si A, B y C son puntos no colineales.

$\Rightarrow$ A, B y C determinan el plano P.

2. Teorema

Una recta y un punto, que no pertenece a ella, determinan un plano.

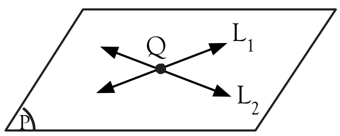


Si $A \notin \overline{L}$

$\Rightarrow$ A y $\overleftrightarrow{L}$ determinan al plano P.

3. Teorema

Dos rectas secantes determinan un plano.

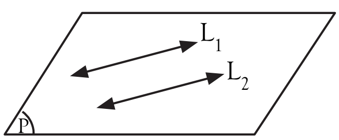


Si $L_1 \cap L_2 = \{Q\}$

$\Rightarrow$ $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ determinan al plano P.

4. Teorema

Dos rectas paralelas determinan un plano.



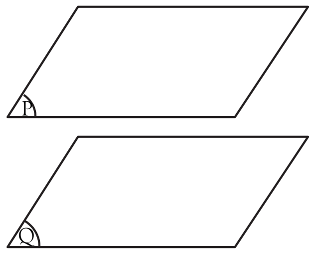
Si $\overline{L_1} // \overline{L_2}$

$\Rightarrow$ $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ determinan al plano P.

Posiciones Relativas de dos planos

A. Planos Paralelos

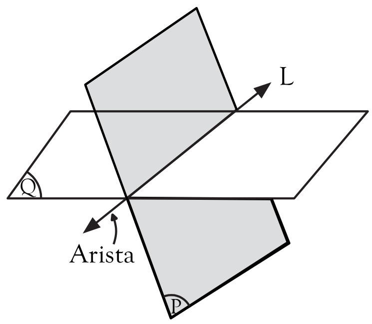
Dos planos son paralelos o paralelos entre sí, cuando no tienen un punto en común, es decir, no se intersecan.



Si $\square P \cap \square Q = \varnothing$
$\Rightarrow \square P // \square Q$
$\varnothing$: Vacío o Nulo

B. Planos Secantes

Son dos planos que tienen una recta en común denominada arista o traza de un plano sobre el otro.



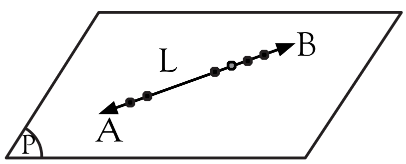
Si $\square P \cap \square Q = \overline{L}$

$\Rightarrow \square P$ y $\square Q$ son secantes.

Posiciones Relativas de una Recta y un Plano

1. Recta contenida en un plano

Una recta está contenida en un plano cuando todos los puntos de dicha recta pertenecen al plano.



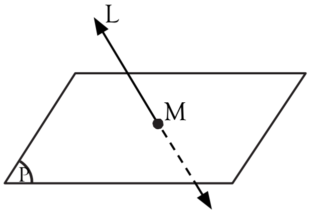
Observación

Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano, dicha recta está contenida en dicho plano.

Si $A \in$ P y $B \in$ $\Rightarrow$ $L \subset$ P
P

2. Recta secante al plano

Una recta se denomina secante a un plano, si sólo tiene un punto en común con el plano, al cual se le denomina punto de intersección o traza de la recta sobre el plano.



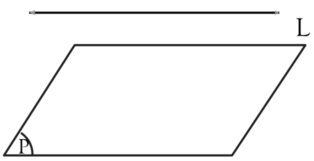
Punto M : Pie de la recta secante

$$\text{Si } \overline{L} \cap \square P = \{M\}$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{L} \text{ y } \square P : \text{Secantes}}$$

3. Recta paralela a un plano

Una recta y un plano son paralelos si no tienen ningún punto en común.

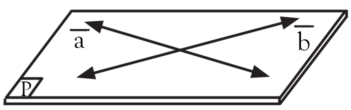


$$\text{Si } \overline{L} \cap \square P = \varnothing$$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{L} \,//\, \square P}$$

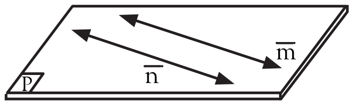
POSICIONES DE DOS RECTAS EN EL ESPACIO

1. Rectas Secantes



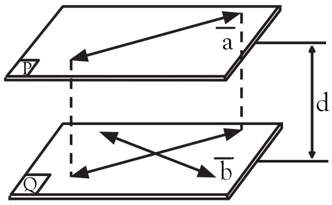
$\overline{a}$ y $\overline{b}$ son secantes y pertenecen al plano P.

2. Rectas Paralelas



$\overline{m}$ y $\overline{n}$ son paralelas y pertenecen al plano P.

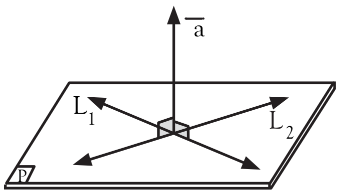
3. Rectas Cruzadas o Alabeadas



$\overline{a} \in \square P$
$\overline{b} \in \square Q$
"d" : distancia entre $\overline{a}$ y $\overline{b}$

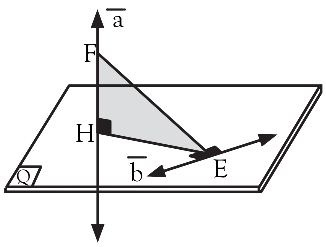
Recta perpendicular a un plano

Una recta es perpendicular a un plano si es perpendicular a dos rectas contenidas en dicho plano.



Si $\overline{a} \perp L_1$ y $L_2 \rightarrow \overline{a} \perp$ al plano P.

Teorema de las tres perpendiculares



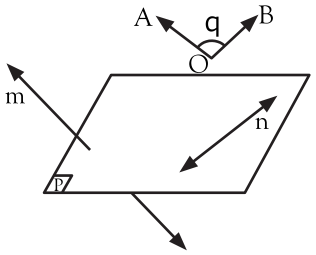
Si se cumple:

$\overline{a} \perp$ plano Q
$\overline{b}$ está contenida en el plano Q
$\overline{HE} \perp \overline{b}$
"F" es un punto cualquiera de $\overline{a}$.

$$\boxed{\Rightarrow \overline{EF} \perp \overline{b}}$$

ÁNGULO ENTRE DOS RECTAS ALABEADAS

Es el ángulo determinado por dos rayos respectivamente paralelos a las rectas dadas y cuyo origen es un punto cualquiera en el espacio.

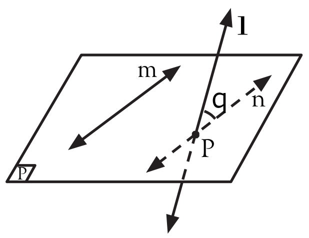


Si $\overrightarrow{OA} /\!/ \overleftrightarrow{m}$ y $\overrightarrow{OB} /\!/ \overleftrightarrow{n}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{“q” es el ángulo entre } \overleftrightarrow{m} \text{ y } \overleftrightarrow{n}}$

OTRA FORMA

Por un punto de una de ellas se traza una recta paralela a la otra determinandose así el ángulo que se busca.

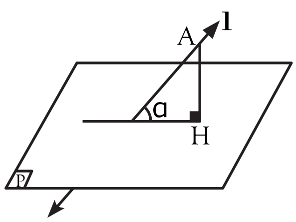


Si $\overleftrightarrow{n} /\!/ \overleftrightarrow{m}$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{“q” es el ángulo entre } \overleftrightarrow{l} \text{ y } \overleftrightarrow{n}}$

ÁNGULO ENTRE UNA RECTA Y UN PLANO

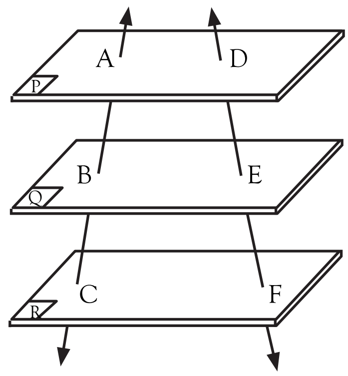
Es el ángulo formado por la proyección ortogonal de la recta respecto al plano.



Si $\overline{AH} \perp \square P$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{“a ” es el ángulo entre } \overleftrightarrow{l} \text{ y el } \square P}$

TEOREMA DE TALES EN EL ESPACIO



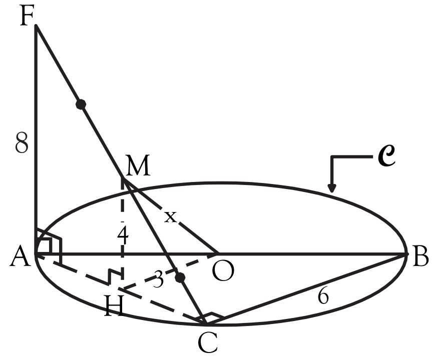
Si $\square P /\!/ \square Q /\!/ \square R$

$\rightarrow$ $\boxed{\dfrac{AB}{BC} = \dfrac{DE}{EF}}$

Ejercicios Resueltos

1) En una circunferencia de diámetro $\overline{AB}$; se traza $\overline{AF}$ perpendicular al plano de la circunferencia. Si la cuerda BC de la circunferencia mide 6 m y $\overline{AF}$ = 8 m, calcula la longitud del segmento que une el punto medio de $\overline{AB}$ con el punto medio de $\overline{FC}$.

Resolución:



Si $\overline{AF} \perp \mathcal{C} \Rightarrow \overline{AF} \perp \overline{AC}$

$\overline{AB}$ diámetro $\Rightarrow m\measuredangle ACB = 90°$

$\overline{MH} // \overline{AF} \Rightarrow \overline{MH} \perp \mathcal{C} \Rightarrow \overline{MH} \perp \overline{HO}$

Pero: $AH = HC$ y $MH = FA/2 = 4$

(T. Puntos medios)

En $\triangle$ ACB: $AO = OB \wedge AH = HC$

$\Rightarrow HO = 6/2 = 3$

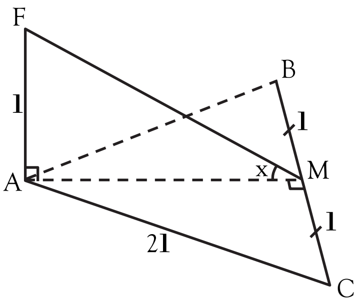
$\therefore$ En $\triangle$ MHO:

$x^2 = 3^2 + 4^2 \Rightarrow x = 5$

Rpta.: 5

2) Por el vértice A de un triángulo equilátero ABC se traza $\overline{AF}$ perpendicular al plano del triángulo, además $2\ AF = AB$. Calcula el ángulo que forma $\overline{FM}$ con el plano del triángulo si "M" es punto medio de $\overline{BC}$.

Resolución:



$\overline{AF} \perp \triangle ABC \Rightarrow \overline{AF} \perp \overline{AM}$

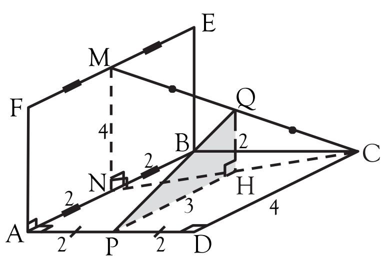
$\therefore \triangle$ FAM rectángulo: $AM = \ell\sqrt{3}$

$\therefore \triangle$ FAM notable: $x = 30°$

Rpta.: 30

3) Se tienen los cuadrados ABCD y ABEF ubicados en planos perpendiculares. Calcula la distancia entre los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{MC}$ (M punto medio de $\overline{EF}$) si $AB = 4$ u.

Resolución:



$\overline{MN} // \overline{AF} \Rightarrow \overline{MN} \perp \overline{AB}; \overline{MN} \perp \square ABCD$

$\Rightarrow \overline{MN} \perp \overline{NC}$

En $\triangle$ MNC: $\overline{QH} // \overline{MN} \Rightarrow \overline{QH} \perp \overline{NC}$;

$QH = MN/2 \Rightarrow QH = 2$; $NH = HC$

(Teorema puntos medios)

$\Rightarrow$ En el trapecio DANC: $\overline{PH}$ es mediana

$\Rightarrow PH = \dfrac{4+2}{2} \Rightarrow PH = 3$

Como $\overline{QH} // \overline{MN} \Rightarrow \overline{QH} \perp \square ABCD$

$\Rightarrow \overline{QH} \perp \overline{PH}$

$\therefore$ PHQ: $\triangle$

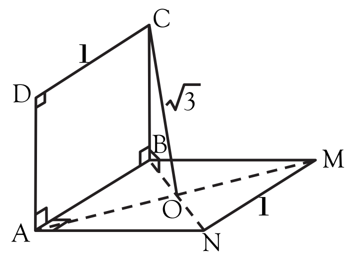
T. Pitágoras: $x^2 = 3^2 + 2^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{13}$

Rpta.: $\sqrt{13}$ u

4) Los cuadrados ABCD y ABMN se encuentran en planos perpendiculares, siendo "O" centro del cuadrado ABMN. Calcula el perímetro de ABCD si $CO = \sqrt{3}$ u.

Resolución:



Si $\square ABCD \perp \square ABMN \Rightarrow CB \perp BO$

Si $AB = \ell \Rightarrow OB = \ell\sqrt{2}/2$; $BC = \ell$

$\triangle$ CBO: $(OC)^2 = (BC)^2 + (BO)^2$

$(\sqrt{3})^2 = \ell^2 + (\ell\sqrt{2}/2)^2$

$\Rightarrow 3 = \dfrac{3\ell^2}{2} \Rightarrow \ell = \sqrt{2}$

$\therefore 2p_{ABCD} = 4\sqrt{2}$ u

Rpta.: $4\sqrt{2}$ u

Resolviendo en clase

1 Indica verdadero (V) o falso (F). según corresponda:

( ) Una recta y un punto, que no pertenece a ella, determinan un plano.

( ) Dos rectas secantes no forman un plano.

( ) Dos rectas paralelas determinan un plano.

Resolución:

Rpta:

2 Indica verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

( ) Tres puntos cualquiera determinan un plano.

( ) Una recta y un punto determinan un plano.

( ) Dos puntos no colineales forman un plano.

Resolución:

Rpta:

3 Con "K" rectas paralelas se determinan 66 planos como máximo. Halla "K".

Resolución:

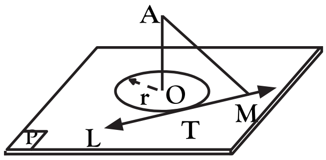
Rpta:

4 Se tiene dos cuadrados ABCD y ABEF ubicados en planos perpendiculares y cuyos centros son P y Q, respectivamente. Calcula la distancia PQ si AB = 4 u.

Resolución:

Rpta:

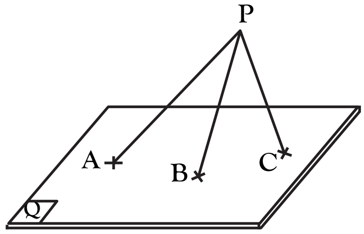
5 Si $\overline{OA}$ es perpendicular al plano "P", OA = 5, r = 2 y "T" es punto de tangencia. Halla $\overline{AM}$ si TM = 8.



Resolución:

Rpta:

6 En el gráfico "A", "B" y "C" pertenecen al plano "Q". Si $\overline{PA}$, $\overline{PB}$ y PC forman en el plano ángulos de 45°, 30° y 53°, además PC = 15, calcula PA/PB.

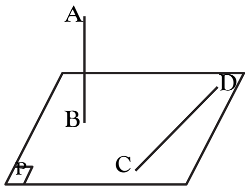


Resolución:

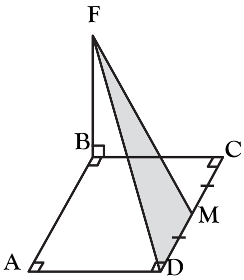
Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Si AB y CD son dos segmentos ortogonales que miden 6 y 8 cm respectivamente, calcula la longitud del segmento que une los puntos medios de $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$.



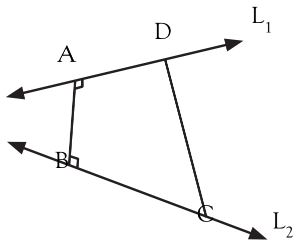
8. En el gráfico, $\overline{BF}$ es perpendicular al plano del cuadrado ABCD. Si AB = BF = BC = a y "M" es punto medio de $\overline{CD}$. Halla el área de la región sombreada.



9. Se traza PQ perpendicular a un plano "H" ("Q" en el plano "H"). Haciendo centro en "Q" se traza una circunferencia de radio 9 m; y por un punto "B" de ésta se traza la tangente BC que mide 8 m. Calcula PC si PQ = 12 m.

10. En un plano se ubican los puntos A y B, exterior al plano se ubica el punto P de modo que $\overline{AP}$ y $\overline{BP}$ forman ángulos que miden 30° y 45° con dicho plano. Si AP = 4, calcula BP.

11. El ángulo entre $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$ es 60°.
Si DA = AB = BC = 6, calcula CD.



12. En la figura, G es el baricentro de la región triangular ABC y PG es perpendicular al plano que contiene al triángulo ABC. Si m∠PBA = m∠CBP; $\overline{AC}$ = 12 y $\overline{PG}$ = $\sqrt{17}$, calcula la distancia de P a AB.

Para reforzar

1. Indica si es verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

   ( ) Tres puntos determinan siempre un plano.
   ( ) Dos rectas determinan siempre un plano.
   ( ) Un plano queda determinado cuando una recta se desplaza paralelamente a sí misma.

   a) VVV b) VVF c) FFV
   d) FVF e) FFF

2. La distancia de un punto "A" a otro "B" contenido en un plano "P" es 8 m. La distancia de "A" al plano "P" es 5 m. Halla la longitud de la proyección del segmento $\overline{AB}$ sobre el plano "P".

   a) 4 m b) $\sqrt{3}$ m c) $\sqrt{37}$ m
   d) 39 m e) N.A.

3. El cuadrado ABCD y el triángulo equilátero ABE se encuentran en plano perpendiculares. Calcula la distancia entre los puntos medios de $\overline{BE}$ y $\overline{AD}$ si AB =8 u.

   a) 8 u b) 10 u c) 12 u
   d) 16 u e) 6 u

4. Calcula la longitud de un segmento exterior a un plano sabiendo que su proyección sobre el plano mide 15 cm y las distancias de sus extremos al plano se diferencian en 8 cm.

   a) 16 cm b) 17 cm c) 18 cm
   d) 20 cm e) 23 cm

5. La distancia de un punto "P" a una recta contenida en un plano es de 13 cm, y además la distancia de la recta al pie de la perpendicular que va de "P" al plano es 12 cm. Calcula la distancia de "P" al plano.

   a) 3 cm b) 1 cm c) 5 cm
   d) 6 cm e) 8 cm

6. Si la distancia de un punto a un plano "Q" es 6 u y la distancia del punto a una recta contenida en el plano es 9 u. Halla la distancia desde la proyección de dicho punto al plano hacia la recta.

   a) $2\sqrt{6}$ u b) $3\sqrt{5}$ u c) $4\sqrt{6}$ u
   d) $2\sqrt{7}$ u e) $5\sqrt{3}$ u

7. Tres planos paralelos determinan sobre una recta secante L_1, los segmentos $\overline{AE}$ y $\overline{EB}$, sobre otra recta secante L_2 los segmentos $\overline{CF}$ y $\overline{FD}$.
   Si AB = 8, CD = 12 y FD - EB = 1, halla CF.

   a) 6 b) 8 c) 9
   d) 4 e) 2

8. Se tiene un cuadrado ABCD de lado 7 m. Si se levanta por C la perpendicular $\overline{CE}$, y EB mide 25 m, calcula EC + ED.

   a) 24 m b) 25 m c) 49 m
   d) 50 m e) 59 m

9. ¿Cuántos planos como máximo determinan 8 puntos no colineales en el espacio?

   a) 28 b) 20 c) 36
   d) 56 e) 60

10. En un cuadrado ABCD, con diámetro $\overline{AB}$ se traza la semicircunferencia perpendicular al plano del cuadrado. Si M, N y P son puntos medios de $\overset{\frown}{AB}$, $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$ respectivamente, calcula m∠ MNP.

    a) 100° b) 120° c) 90°
    d) 150° e) 135°

11. Las rectas L_1 y L_2 son alabeadas y forman un ángulo de 60°, además $\overline{AB}$ es la menor distancia entre ellas ($A \in L_1$; $B \in L_2$). Si se ubica "P" en L_1 y "Q" en L_2; $AB = 2\sqrt{5}$u; AP = 4u; BQ = 6u, calcula el área del triángulo PBQ.

    a) $12\sqrt{2}$ u^2 b) 24 u^2 c) $24\sqrt{2}$ u^2
    d) 12 u^2 e) 36 u^2

12. Las rectas L_1 y L_2 son alabeadas y ortogonales siendo AB la menor distancia entre ellas ($A \in L_1$; $B \in L_2$); además se ubican R y S en L_1 y L_2 respectivamente, $AB = \sqrt{17}$; $AR = 2\sqrt{3}$; $BS = 2\sqrt{13}$. Calcula RS.

    a) 10 b) 9 c) 8
    d) 11 e) 12