

Aritmética

MULTIPLICACION Y DIVISION

MULTIPLICACIÓN

Es una operación aritmética que consiste en adicionar una misma cantidad un número determinado de veces.

Ejemplo:

$$5 \times 4 = \underbrace{5 + 5 + 5 + 5}_{4 \text{ veces}} = 20$$

En general:

$$M \times m = \underbrace{M + M + \dots + M}_{m \text{ veces}} = P$$

Donde:

M: multiplicando

m : multiplicador

P : producto

⊕ ALGORITMO DE LA MULTIPLICACIÓN

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 259 \times \rightarrow \text{Multiplicando} \\ 27 \rightarrow \text{Multiplicador} \\ \hline 1813 \\ 518 \\ \hline 6993 \end{array} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{Productos Parciales} \\ \text{Producto} \end{array}$$

Donde:

$$1813 = 259 \times 7$$

$$518 = 259 \times 2$$

⊕ PROPIEDADES

1. P. Asociativa

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

2. P. Conmutativa

$$a \times b = b \times a$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} 2 \times (a \times 3) &= 2 \times (3 \times a) \\ &= (2 \times 3) \times a \\ &= 6 \times a \end{aligned}$$

3. P. Distributiva

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \overline{ab} \cdot 99 &= \overline{ab} (100 - 1) \\ &= \overline{ab00} - \overline{ab} \end{aligned}$$

4. La terminación del producto de dos números es igual a la terminación del producto de sus últimas cifras

Ejemplo:

$$\begin{aligned} * (\dots 3) \times (\dots 4) &= (\dots 2) \\ &\text{ya que } 3 \times 4 \text{ termina en } 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} * \text{ Si } \overline{abc} \times 3 &= \overline{xy7} \quad \square \quad c=9 \\ &\text{ya que } 9 \times 3 \text{ termina en } 7. \end{aligned}$$

Observaciones:

$$(\# \text{ Par}) (\# \text{ Entero}) = (\# \text{ Par})$$

$$(\# \text{ Impar}) (\# \text{ Impar}) = (\# \text{ Impar})$$

$$(\dots 5) (\# \text{ Impar}) = (\dots 5)$$

$$(\dots 5) (\# \text{ Par}) = (\dots 0)$$

$$(\dots 9) (\dots x) = [\dots (10 - x)]$$

5. Producto de Enteros Consecutivos

$$n(n+1) = \begin{cases} \dots 0 \\ \dots 2 \\ \dots 6 \end{cases}$$

Ejemplos:

$$* 5(6) = 30$$

$$* 6(7) = 42$$

$$* 7(8) = 56$$

6. Cantidad de cifras de un producto

Ejemplo:

Si A tiene 5 cifras y B tiene 4 cifras, entonces:

$$10^4 \leq A < 10^5$$

$$10^3 \leq B < 10^4$$

Multiplicando:

$$10^7 \leq AxB < 10^9$$

Luego AxB tiene 8 ó 9 cifras.

En general:

Si A tiene n cifras

y B tiene m cifras

A x B tiene $n + m - 1$ o $n + m$

Ejemplo:

Halla la mínima cantidad de cifras de $\overline{abcd} \times \overline{mn}$.

Solución:

\overline{abcd} 4 cifras

\overline{mn} 2 cifras

Luego:

$$\overline{abcd} \times \overline{mn} \square (4 + 2) - 1 = 5 \text{ cifras}$$

⊕ LEYES FORMALES

I. Clausura

El producto de dos números enteros es un número entero. Simbólicamente se denota de la siguiente manera:

$$a, b \in \mathbb{Z} \square a \cdot b = P \in \mathbb{Z}$$

II. Conmutativa

El orden de los factores no altera el producto.

$$A \times B = B \times A$$

III. Elemento Neutro Multiplicativo

Existe uno y sólo un número que se denota por "1", tal que:

$$a \cdot 1 = a \quad \text{o} \quad 1 \cdot a = a$$

⊕ TEOREMA

Dado $P = a \cdot b$, si "a" aumenta o disminuye en "n" unidades, entonces P aumenta o disminuye en "n · b" unidades.

Ejemplo:

En una multiplicación, si el multiplicando aumenta 6 unidades, el producto aumenta en 78 unidades.

Calcula el multiplicador.

Resolución:

$$6 \cdot m = 78$$

$$m = 13$$

4 el multiplicador es 13.

⊕ LA MULTIPLICACIÓN EN OTROS SISTEMAS

$$\begin{array}{r} 532_s \times \\ \quad 34_s \\ \hline 5150 \\ \underline{2016} \\ 25330_s \end{array}$$

DIVISIÓN

Es la operación inversa de la multiplicación que tiene por objeto, dados dos números: dividendo (D) y divisor (d), hallar un tercer número llamado cociente (q), que multiplicado por el divisor y sumar su residuo, nos da el dividendo.

En general:

$$\begin{array}{r} D \quad \overline{)d} \\ \underline{q} \\ R \end{array}$$

donde:
D: Dividendo
d: Divisor
q: Cociente
R: Residuo

CLASES DE DIVISIÓN

1. División Exacta

Es aquella en la cual el dividendo contiene al divisor un número entero (exacto) de veces y, por tanto, el residuo es cero.

$$\begin{array}{r} D \quad \overline{)d} \\ \underline{q} \\ 0 \end{array}$$

Se cumple:
 $D = d \cdot q$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 135 \overline{)5} \\ \underline{27} \\ 0 \end{array} \textcircled{R}$$

5 está contenido
27 veces en 135
 $\therefore 135 = 5 \cdot 27$

2. División Inexacta

Es aquella en la cual el divisor no está contenido de forma exacta en el dividendo y, por tanto, existe un residuo distinto de cero.

a) División Inexacta por Defecto:

$$\begin{array}{r} D \quad \overline{)d} \\ \underline{q} \\ R_d \end{array}$$

Se cumple:
 $D = dq + R_d$
 $R_d < d$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 147 \overline{)15} \\ \underline{9} \\ 12 \end{array} \textcircled{R}$$

15 está contenido
9 veces en 147,
quedando 12
unidades.
 $\therefore 147 = 15 \cdot 9 + 12$

b) División Inexacta por Exceso:

$$\begin{array}{r} D \quad \overline{)d} \\ \underline{q+1} \\ -R_e \end{array}$$

Se cumple:
 $D = d(q+1) - R_e$
 $R_e < d$

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 147 \overline{)15} \\ \underline{10} \\ -3 \end{array} \textcircled{R}$$

15 está contenido
10 veces en 147,
excediendo en 3
unidades.
 $\therefore 147 = 15 \cdot 10 - 3$

PROPIEDADES

- En toda división se cumple que el residuo es menor que el divisor.

$$\text{cero} \leq \text{residuo} < \text{divisor}$$

- En la división entera inexacta se cumple que:

$$\begin{array}{l} \text{residuo máximo} = \text{divisor} - 1 \\ \text{residuo mínimo} = 1 \end{array}$$

- En una división exacta para que el cociente aumente o disminuya 1, entonces al dividendo se aumenta o disminuye $1 \times \text{divisor}$.
- Si se multiplica o divide el dividendo y el divisor por un mismo número, el cociente no varía, pero el residuo queda multiplicado o dividido, según el caso, por dicho número.

$$\begin{array}{l} \text{Si } D = dq + R \\ D \cdot k = (d \cdot k)q + R \cdot k \end{array}$$

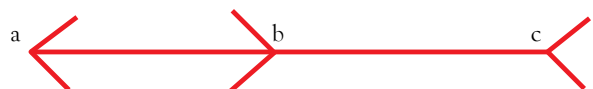
$$\frac{D}{K} = \frac{d \cdot q}{K} + \frac{R}{K}$$

- En una división exacta el máximo valor que puede añadirse al dividendo para que el cociente no varíe es:

$$\text{divisor} - 1$$

La ilusión de Müller-Lier

El segmento bc parece más largo que el ab, aunque en realidad son iguales.



Resolviendo en clase

1 Si se cumple que:

$$abc.a = 2618$$

$$abc.b = 1496$$

Hallar: $abc - a0b$

Resolución:

3 Si:

$$abc.63 = \dots 746$$

Hallar: $a+b+c$

Resolución:

Rpta:

2 Calcule la cifra de orden 2 de un numeral en la base 7, que se obtiene al multiplicar 246_7 por 35_7 .

Resolución:

Rpta:

Rpta:

4 En una multiplicación, si el multiplicando aumenta 6 unidades el producto se incrementa en 1644. Calcular el multiplicador.

Resolución:

Rpta:

- 5 En una división se observó que el residuo fue 23, siendo además máximo. Calcule el dividendo, si el cociente es 10.

Resolución:

- 6 Se tiene 101 números consecutivos, se divide el mayor entre el menor y se obtiene 17 de resto, ¿cuál es la suma de los números?
(Considere al cociente diferente de 2)

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Disminuyendo en 3 a los términos de la multiplicación, el producto disminuye en 231. Halle los factores, si la diferencia de ellos es 36.
8. Al realizar una división por defecto y por exceso notamos que los residuos respectivamente fueron 5 y 8. Calcule el divisor.
9. Si el divisor es igual a 19, el cociente por exceso igual a 8 y el residuo el menor valor posible. Hallar la suma de cifras del dividendo.
10. La diferencia de dos números es 95 y la división del mayor entre el menor da cociente 3 y residuo 15. ¿cuál es el número mayor?
11. Calcule un número de tres cifras tal que al dividirlo entre el numeral formado por sus dos últimas cifras se obtuvo 24 de cociente y 2 de residuo.
12. El resto por defecto, el resto por exceso, el cociente por defecto y el divisor de una división están en progresión aritmética de razón 5. calcular el dividendo.

Para reforzar

- Si se cumple que:
 $abc.a = 972$
 $abc.b = 648$
 $abc.c = 1296$
Hallar: abc^2
a) 104970 b) 104976 c) 102634
d) 104978 e) 104967
- Si 324_5 multiplicado por 34_5 es igual a "M" de la base 5, calcule la suma de cifras de "M".
a) 10 b) 11 c) 12
d) 9 e) 13
- Si:
 $abc.32 = \dots 920$
Hallar: $a + b + c$
a) 12 b) 15 c) 17
d) 18 e) 19
- En una multiplicación, si el multiplicando aumenta en 15 unidades el producto aumenta en 420 unidades. Calcular el multiplicador.
a) 25 b) 21 c) 28
d) 27 e) 30
- Al efectuar una división entera se observó que el dividendo es 348, el cociente es 8 y el residuo la mitad del cociente. Hallar el divisor
a) 37 b) 45 c) 32
d) 43 e) 48
- Si el divisor es 7 y el resto por exceso es 4. ¿Cuál es el resto por defecto?
a) 3 b) 5 c) 7
d) 8 e) 9
- Al dividir "N" entre 48 se obtiene 17 de cociente y un residuo mínimo. Hallar "N".
a) 812 b) 817 c) 742
d) 852 e) 848
- Halle la suma de las cifras de un número de la forma $abcd$ tal que multiplicado por 79 termine en $bcd3$.
a) 26 b) 19 c) 21
d) 17 e) 24
- La diferencia de dos números es 64 y la división del mayor entre el menor da cociente 3 y residuo 18. ¿cuál es el mayor?
a) 23 b) 41 c) 59
d) 87 e) 91
- En una división de números enteros, el resto es 45, hallar el dividendo sabiendo que es mínimo y que el cociente vale 2.
a) 132 b) 138 c) 139
d) 140 e) 137
- Calcule el mayor número de tres cifras tal que al ser dividido por defecto y por exceso se obtuvo 8 y 5 de residuos respectivamente.
a) 996 b) 995 c) 994
d) 993 e) 992
- El resto por defecto, el resto por exceso el cociente por defecto y el divisor de una división están en progresión aritmética de razón 7. Calcular el dividendo.
a) 112 b) 110 c) 100
d) 90 e) 80