

Aritmética

MCD Y MCM

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

Se llama M.C.D. de varios números diferentes de cero, al mayor número que sea divisor de todos ellos.

Ejemplo :

Sean los números 12; 30 y 48.

- ① → Divisor común
- ② → Divisor común
- ③ → Divisor común
- ⑥ → Máximo divisor común

$$\Rightarrow \boxed{\text{MCD}(12; 30; 48) = 6}$$

CÁLCULO DEL M.C.D.

- POR DESCOMPOSICIÓN INDIVIDUAL EN FACTORES PRIMOS** (descomposición canónica)

El MCD será el producto de factores primos comunes con el menor exponente.

Ejemplo :

Sean los números 1200; 1440 y 900.

Donde:

$$1200 = 2^4 \times 3 \times 5^2$$

$$1440 = 2^5 \times 3^2 \times 5$$

$$900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$$

$$\boxed{\text{MCD}(1200, 1440, 900) = 2^2 \times 3 \times 5 = 60}$$

- POR DESCOMPOSICIÓN SIMULTÁNEA EN FACTORES PRIMOS.**

Se busca solamente los factores comunes.

Ejemplo :

Sean los números 360; 960 y 3000

360	960	3000	2
180	480	1500	2
90	240	750	2
45	120	375	3
15	40	125	5
3	8	25	

3, 8 y 25 son P.E.S.I., entonces se detiene la operación.

$$\boxed{\text{MCD}(360, 960, 1200) = 2^3 \times 3 \times 5 = 120}$$

ALGORITMO DE EUCLIDES

Procedimiento:

Se divide el mayor entre el menor, obteniéndose un cociente y un primer residuo. Sin considerar el cociente, se divide el menor entre el primer residuo obteniéndose otro cociente y un segundo residuo, enseguida; se divide el primer residuo entre el segundo, así sucesivamente, hasta que el residuo resulte cero. El MCD de los enteros es el divisor de la última división cuyo residuo ha resultado cero.

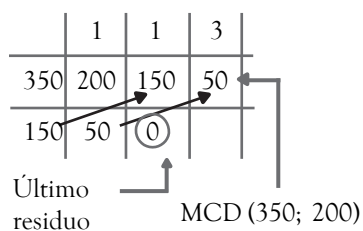
Ejemplo :

1.

	1	1	4
540	300	240	60
240	60	0	

Último residuo → MCD (540; 300)

2.



PROPIEDADES BÁSICAS

1) Sean los números A y B, si A es múltiplo de B:

$$\Rightarrow \boxed{\text{MCD}(A; B) = B}$$

Sean los números 30 y 6 ,
donde 30 es múltiplo de 6.

$$\Rightarrow \boxed{\text{MCD}(30; 6) = 6}$$

2) Sean los números A y B, si A y B son P.E.S.I.

$$\Rightarrow \boxed{\text{MCD}(A; B) = 1}$$

Ejemplo :

Sean los números 36 y 25, donde 36 y 25 son P.E.S.I.

$$\Rightarrow \boxed{\text{MCD}(36; 25) = 1}$$

3) El MCD también es el mayor factor común de varios números.

- $\text{MCD}(4x; 6x) = 2x$

- $\text{MCD}(a^2; a^3) = a^2$

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Se llama M.C.M. de varios números positivos, al menor número distinto de cero que contiene a cada uno de ellos un número entero y exacto de veces.

Así:

Números	Múltiplos
6	6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48,...
8	8, 16, 24, 32, 40, 48, ...

Múltiplos comunes : 24, 48, 72 ...

$$\text{MCM}(6; 8) = 24$$

CÁLCULOS DEL M.C.M.

- **Por descomposición Individual en Factores Primos**
(descomposición canónica)

* El MCM es el producto de factores primos comunes y no comunes con el mayor exponente.

Ejemplo :

Sean los números 80; 120 y 150.

Donde:

$$80 = \underline{2^4} \times 5$$

$$120 = \underline{2^3} \times \underline{3} \times 5$$

$$150 = \underline{2} \times \underline{3} \times 5^2$$

$$\text{MCM}(80, 120, 150) = 2^4 \times 5^2 \times 3 = 1200$$

- **Por Descomposición Simultánea de Factores Primos**

* se busca todos los factores sin excepción.

Ejemplo :

Sean los números 60; 140 y 200

60	140	200	2
30	70	100	2
15	35	50	2
15	35	25	3
5	7	25	5
1	7	5	5
1	7	1	7
1	1	1	

$$\text{MCM}(60, 140, 200) = 2^3 \times 3 \times 5^2 \times 7 = 4200$$

PROPIEDADES BÁSICAS

- 1 Sean los números A y B ,
si A es divisible por B.

$$\Rightarrow \text{MCM (A; B)} = A$$

Ejemplo :

Sean los números 36 y 9 ,
donde 36 es divisible por 9.

$$\Rightarrow \text{MCM (36;9)} = 36$$

- 2 Sean los números A y B ,
si A y B son P.E.S.I.

$$\Rightarrow \text{MCM (A; B)} = A \times B$$

Ejemplo :

Sean los números 12 y 25 ,
donde 12 y 25 son P.E.S.I.

$$\Rightarrow \text{MCM (12;25)} = 300$$

Resolviendo en clase

- 1 Dados 3 números A, B y C, tales que al aplicarles descomposición simultánea obtenemos el proceso:

$$A - B - C = 5$$

$$D - F - 1638 = K$$

$$G - 117 - 234 = H$$

$$4 - M = 18$$

Calcula el valor de: $A + B + F - (K - G - M)$

Resolución:

Rpta:

- 2 Si : $A = 2^{n-1} \times 3^{2n+1} \times 5^{n+2}$,
 $B = 2^{n+2} \times 3^{n+1} \times 7^n$ y
 $C = 2^{n+1} \times 3^n \times 7^{n+1}$; y además:
 $\text{MCD}(A, B, C) = 2 \times 3^2$, halla $3n + 2$.

Resolución:

Rpta:

- 3 Halla "k", sabiendo que:

$$\text{MCD}(210k; 300k; 420k) = 1200$$

Resolución:

Rpta:

- 4 Calcula $A + B$ en el esquema del algoritmo de Euclides:

x	1	1	1	2
A	B			8
x				

Resolución:

Rpta:

- 5 Al calcular el MCD de dos enteros primos entre sí, mediante el algoritmo de Euclides, se ha obtenido los cocientes sucesivos, 1, 2, 3, 3 y 2. Halla el número mayor.

Resolución:

- 6 Se ha dividido tres barras de cobre de longitudes 240, 480 y 560m en trozos de igual longitud, siendo ésta la mayor posible. ¿Cuántos trozos se han obtenido?

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Tres barriles contienen 200, 480 y 680 litros de aceite. Sus contenidos se van a distribuir en envases que sean iguales entre sí y de la mayor capacidad posible. ¿Cuántos de estos envases son necesarios si de cada barril no debe sobrar nada de aceite?

8. Si: $A = 2^{n-3} \times 3^n$ y
 $B = 2^n \times 3^{n+2} \times 5^{n+4}$

Si la cantidad de divisores del MCM de A y B es 480, halla «n».

9. El mínimo común múltiplo de 18p; 30p y 50p es 1800. Calcula $p^2 + 1$.

10. Halla «x» si el MCM de:

$$A = 64^x \times 18^x \text{ y } B = 36^x \times 9 \text{ es } 2^{21} \times 3^8$$

11. Se tiene ladrillos cuyas dimensiones son 12; 15 y 24 cm. ¿Cuántos ladrillos serán necesarios para asentar y formar un cubo compacto?

12. En un patio de forma cuadrada se desea acumular losetas 15 x 24 cm, de tal manera que no sobre ni falte espacio. ¿Cuál es el menor número de losetas que se requiere?

Para reforzar

1. Dados 3 números A, B y C, tales que al aplicarles descomposición simultánea obtenemos el proceso:

$$\begin{array}{r|l} A - B - C & 2 \\ D - F - 45 & K \\ G - 5 - 15 & H \\ 13 - M - 3 & \end{array}$$

Halla : $A+B+F-(K + G + M)$

- a) 439 b) 465 c) 429
d) 539 e) 366
2. Si: $A=2^{n-1} \times 3^{2n+1} \times 5^{n+2}$,
 $B = 2^{n+2} \times 3^{n+1} \times 7^n$ y
 $C = 2^{n+1} \times 3^n \times 7^{n+1}$; y además:
 $MCD(A, B, C) = 2 \times 3^2$, halla $3n + 2$.
- a) 11 b) 20 c) 8
d) 17 e) 14
3. Si $MCD(200k; 180k; 240k)$ es igual a 600, calcula k.
- a) 10 b) 40 c) 20
d) 50 e) 30
4. Al calcular el MCD de dos enteros primos entre sí, mediante el algoritmo de Euclides, se ha obtenido los cocientes sucesivos, 1, 2, 2, 3, 5 y 2. Halla el número mayor.
- a) 192 b) 92 c) 197
d) 386 e) 249
5. Se ha dividido tres barras de acero de longitudes 540, 480 y 360m en trozos de igual longitud, siendo ésta la mayor posible. ¿Cuántos trozos se han obtenido?
- a) 25 b) 24 c) 23
d) 32 e) 33
6. En un patio de forma cuadrada se desea acumular losetas 24×30 cm, de tal manera que no sobre ni falte espacio. ¿Cuál es el menor número de losetas que se requiere?
- a) 20 b) 120 c) 60
d) 10 e) 12
7. Calcula $M + N$ en el esquema del algoritmo de Euclides:
- | | | | | |
|---|---|---|---|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 |
| M | N | | | 10 |
| x | | | | |
- a) 710 b) 740 c) 720
d) 750 e) 730
8. Tres barriles contienen 210, 300 y 420 litros de cerveza, sus contenidos se van a distribuir en envases que sean iguales entre sí y de la mayor capacidad posible. ¿Cuántos de estos envases son necesarios si de cada barril no debe sobrar nada de cerveza?
- a) 33 b) 60 c) 16
d) 17 e) 21
9. Si: $A = 2^{n+2} \times 3^{n-3}$ y $B = 2^{2n-1} \times 3^n$; y además la cantidad de divisores del $MCM(A, B)$ es 420, halla «n».
- a) 7 b) 14 c) 8
d) 16 e) 15
10. El mínimo común múltiplo de $24k$; $20k$ y $12k$ es 840. Calcula k.
- a) 5 b) 8 c) 6
d) 9 e) 7
11. Halla «x» si el MCM de:
 $A = 81 \times 18^x$ y $B = 18 \times 81^x$ es 16×3^{18}
- a) 8 b) 6 c) 10
d) 4 e) 2
12. Halla la menor distancia que se puede medir exactamente con una regla que se puede dividir en pedazos de 2, 5 y 8 pies de longitud.
- a) 80 pies b) 60 pies c) 40 pies
d) 240 pies e) 120 pies