Triángulo Educativo

Álgebra

5° SECUNDARIA

LEYES DE EXPONENTES Y RADICALES

Potenciación

$$a^n = P$$

- a : base — $a \in R$
- n : exponente — $n \in Z$
- P : potencia — $P \in R$

Ejemplo:

Exponente

$4^2 = 16$ ← Potencia

Base

DEFINICIÓN 1

Exponente natural :
Si $a \in R$ y $n \in \mathbb{Z}^+$.

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\text{"n" factores}}$$

Ejemplos:

- $x \cdot x \cdot x = x^3$
- $(-3)^2 = (-3)(-3) = 9$
- $-3^2 = -(3)(3) = -9$
  (Observa que el exponente afecta a 3)
- $(-3)^3 = (-3)(-3)(-3) = -27$

DEFINICIÓN 2

Exponente cero : Si $a \in R$; $a \neq 0$.

$$a^0 = 1$$

Ejemplos:

- $3^0 = 1$
- $(-\sqrt{2})^0 = 1$
- $-5^0 = -1$
  (Observa que el cero afecta a 5)
- $5^{3^0} = 5^1 = 5$

DEFINICIÓN 3

Exponente negativo : Si $a \in R$; $a \neq 0$.

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ejemplos:

- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $-2^{-3} = \frac{-1}{2^3} = -\frac{1}{8}$

(Observa que el exponente (-3) afecta a 2)

DEFINICIÓN 4

Exponente fraccionario : Si $m/n \in \mathbb{Q}$.

$$\boxed{a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}}$$

Ejemplos:

- $3^{4/5} = \sqrt[5]{3^4}$

Teoremas

1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$
2. $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$; $a \neq 0$
3. $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$; $a \neq 0$
5. $(a^m)^n = a^{m.n}$
6. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$
7. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$; $a \neq 0$
8. $\sqrt[cn]{a^{cm}} = \sqrt[n]{a^m}$
9. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

Ecuaciones Exponenciales

Elementos:

A. BASES IGUALES

$$\boxed{a^m = a^n \Rightarrow m = n}$$

Ejemplo:

Resuelve: $2^{3x+1} = 2^{10}$

$3x + 1 = 10 \Rightarrow x = 3$

B. FORMAS ANÁLOGAS

$$\boxed{x^x = a^a \Rightarrow x = a}$$

Exceptuando: $\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)} = \left(\frac{1}{4}\right)^{\left(\frac{1}{4}\right)}$

Ejemplo:

$x^x = 27 \Rightarrow x^x = 3^3 \Rightarrow x = 3$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Reduce:

$$S = \frac{\overbrace{\sqrt{x^3}\,.\,\sqrt{x^3}\,.\,\sqrt{x^3}\,.\,\ldots\,.\,\sqrt{x^3}}^{20 \text{ veces}}}{\underbrace{\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt[3]{x^2}\,.\,\sqrt[3]{x^2}\,.\,\ldots\,.\,\sqrt[3]{x^2}}_{30 \text{ veces}}}$$

a) x^{10} b) x^5 c) 1
d) x^{-5} e) x^{-10}

Resolución:

$$S = \frac{(\sqrt{x^3})^{20}}{(\sqrt[3]{x^2})^{30}} = \frac{\sqrt{x^{60}}}{\sqrt[3]{x^{60}}}$$

extraemos:

$$S = \frac{x^{30}}{x^{20}} = \underline{x^{10}}$$

Rpta.: a

2. Calcula:

$$E = \left(\frac{1}{64}\right)^{-2^{-1}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-3^{-1}} + \left(\frac{1}{625}\right)^{-4^{-1}}$$

a) 2 b) 4 c) 8
d) 16 e) 32

Resolución:

$$E = \left(\frac{1}{64}\right)^{-2^{-1}} + \left(\frac{1}{27}\right)^{-3^{-1}} + \left(\frac{1}{625}\right)^{-4^{-1}}$$

$$E = 64^{1/2} + 27^{1/3} + 625^{1/4}$$

$$E = \sqrt{64} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{625}$$

$$E = 8 + 3 + 5$$

$$E = \underline{16}$$

Rpta.: d

3. Si $9^x + 3^{x+3} = 28$, calcula "x".

a) 3 b) 1 c) 0
d) 2 e) 6

Resolución:

$(3^2)^x + 3^{x+3} = 28$

$3^{2x} + 3^{x+3} = 28$

$3^x(3^x + 3^3) = 28$

$3^x(3^x + 3^3) = 28$

$3^x(3^x + 27) = 1(1 + 27)$

₩ $3^x = 1$

$x = \underline{0}$

Rpta.: c

4. Simplifica:

$$\sqrt[n]{\frac{a^nc^n + a^nb^n + b^nc^n}{a^{-n} + b^{-n} + c^{-n}}}$$

a) a+b+c
b) ab + ac + bc
c) abc
d) $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1}$
e) $a^n + b^n + c^n$

Resolución:

Factorizando $a^n + b^n + c^n$ en el numerador:

$$\sqrt[n]{\frac{a^nb^nc^n(b^{-n} + c^{-n} + a^{-n})}{a^{-n} + b^{-n} + c^{-n}}}$$

$$\sqrt[n]{a^nb^nc^n} = \underline{abc}$$

Rpta.: c

5. El exponente de "x" que resulta al simplificar:

$$E = \sqrt[1+1/2]{\sqrt[1+1/3]{\sqrt[1+1/4]{\sqrt[1+1/5]{\ldots\sqrt[1+1/n]{x^n}}}}}$$

es:

a) $n^2/2$ b) $n/2$ c) $2/n$
d) 2 e) $2n/n+1$

Resolución:

Operando las fracciones tenemos:

$$E = \sqrt[3/2]{\sqrt[4/3]{\sqrt[5/4]{\sqrt[6/5]{\ldots\sqrt[(n+1)/n]{x}}}}}$$

$$E = \sqrt[\cancel{3}/2\ \cancel{4}/\cancel{3}\ \cancel{5}/\cancel{4}\ \cancel{6}/\cancel{5}\ \ldots\ (n+1)/\cancel{n}]{x^n}$$

$$E = \sqrt[(n+1)/2]{x^n}$$

$$E = x^{n/[(n+1)/2]}$$

$$E = \underline{x^{2n/(n+1)}}$$

Rpta.: c

Resolviendo en clase

1 Si $x^y = 2$, calcula:

$$(x^y)^{x^y} \cdot (x^3)^{-y} \cdot (4^{y^2})^{y^{-2}}$$

Resolución:

Rpta:

2 Simplifica:

$$\frac{10^4 \cdot 30^3 \cdot 42^3}{54 \cdot 250 \cdot 60^2 \cdot 70^2}$$

Resolución:

Rpta:

3 Efectúa:

a) $\sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[6]{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[6]{9} \cdot \sqrt[4]{9} \cdot \sqrt[3]{9}}{\sqrt[20]{9} \cdot \sqrt[5]{9}}$

Resolución:

Rpta:

4 Si el exponente final de x es 7/4 en:

$$\sqrt{x^n} \cdot \sqrt{x\sqrt{x}}\ ;\ x > 0.$$

calcula n.

Resolución:

Rpta:

5 **Halla "x" si:**

$$\frac{6^{2x-4}}{144^{x-2}} = \frac{1}{16}$$

Resolución:

Rpta:

6 **Simplifica:**

$$W = \frac{5 \cdot 2^{x+2} - 2^{x+4} + 6 \cdot 2^{x-1}}{2^{x+5} - 15 \cdot 2^{x} - 2 \cdot 2^{x+3}}$$

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Sabiendo que:

$$2^{x-3} = 3, \text{ halla } 2^{1-x}$$

8. Después de simplificar:

$$\sqrt[n-2]{\frac{3^{2n+5} - 9 \cdot 3^{2n+1}}{24 \cdot 3^{n+4}}}$$

se obtiene:

9. Si:

$3^{x} = 7^{y}$, calcula el valor de:

$$P = \frac{3^{x+1} - 7^{y+1} + 3^{x}}{7^{y} - 7 \cdot 3^{x} + 3 \cdot 7^{y}}$$

10. Halla el exponente final de x:

$$\frac{(x^{a})^{bc} \cdot (x^{bc})^{a} \cdot \overbrace{x^{ac} \cdot x^{ac} \ldots x^{ac}}^{\text{b veces}} \cdot x}{((x^{3a})^{b})^{c}} \; ; x \neq 0$$

11. Halla "x" en:

$$\sqrt{8^{x+3}} = \sqrt[4]{32^{3x+1}}$$

12. Calcula el exponente final de "x" en:

$$F(x) = \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \sqrt[3]{x \ldots (\text{n radicales})}}}}$$

Para reforzar

1. Calcula el valor de x en:

$$2^x . \sqrt{2} = \sqrt[3]{4^x}$$

a) 2 b) -3/2 c) 1/2
d) 1/4 e) 5/3

2. Simplifica:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-(1/2)^{-1}} + \left(\frac{1}{3}\right)^{-(1/3)^{-1}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{-(1/4)^{-1}}$$

a) 287 b) 281 c) 235
d) 123 e) 435

3. Calcula A + B, siendo:

$$A = \{(1/2)^{-3} + (2/5)^{-2} + (4/7)^{-1}\}^{0,5}$$
$$B = \{8(4/5)^{-2} - (2/3)^{-3} - (8/9)^{-1}\}^{(1/3)}$$

a) 20 b) 9 c) 4
d) 6 e) 5

4. Resuelve:

$$16^{32^{x-2}} = 2^{2^{x+2}}$$

a) 2/5 b) 3/2 c) 5/2
d) 2 e) 5

5. Reduce:

$$P = \frac{\sqrt[5]{25^3} . \sqrt[15]{5} . \sqrt[3]{25}}{\sqrt[3]{5} . \sqrt[5]{125}}$$

a) 1 b) 5 c) 25
d) $\sqrt[3]{5}$ e) $\sqrt[5]{5}$

6. Efectúa:

$$E = \frac{(x^3)^{-2} . x^{-2^{1^0}} . (x^{-4})^2}{x^{(-3)^2} . (x^{-1})^{-2}} (x^{-5})^{-1} .$$

a) 1 b) x c) x^{32}
d) x^{-32} e) x^{-1}

7. Halla "x" si:

$$(0,01)^{x^{27^{-3^{-1}}}} = 0,0001$$

a) 1 b) 2 c) 4
d) 6 e) 8

8. Luego de resolver la ecuación:

$$9^{4^{x+1}} = 3^{8^3}$$

indica el valor de $R = \sqrt[x-1]{x+1}$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 1 e) 0

9. Si ab = 1, calcula el valor de:

$$M = (a^b)^a (b^a)^b ((a^a)^b)^a ((b^b)^a)^a$$

a) 1 b) a c) b
d) ab e) a/b

10. Reduce:

$$R = \sqrt[3]{64^{2^{-1}} + 16^{2^{-2}} - 8^{3^{-1}}}$$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

11. Después simplificar la expresión:

$$E = \left[\sqrt[2^{-n}]{\frac{25^{2^n} - 40^{2^n}}{20^{2^n} - 32^{2^n}}}\right]^{\sqrt[n]{\frac{4^{n^2} + 16^{n^2}}{16^{n^2} + 64^{n^2}}}}$$

resulta:

a) 5 b) 2,5 c) 2
d) 1,25 e) 0,5

12. Después de simplificar:

$$E = \frac{3^{2x/(x-y)} + 6 . 3^{2y/(x-y)}}{\sqrt[x-y]{3^{x+y}}}$$

se obtiene:

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7