Triángulo Educativo

Álgebra

5° SECUNDARIA

# INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

## INECUACIONES DE GRADO SUPERIOR

Son aquellas que presentan la siguiente forma general:

$$\boxed{a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n > 0; \; (<; \geq; \leq) \,/\, n \in Z^+ \wedge n \geq 3}$$

Donde :

$a_0; a_1; a_2; ...; a_n \rightarrow$ constantes o coeficientes

**RESOLUCIÓN**

**A.** Se factoriza el polinomio teniendo en cuenta que todos los factores primos tengan coeficiente principal positivo.

**B.** Se hallan a continuación los puntos críticos, igualando cada factor a cero y éstos se ubican en la recta numérica, guardando su relación de orden.

**C.** Se forma así intervalos, los cuales de derecha a izquierda, poseen un signo comenzando con el signo más y alternando con el signo menos.

**D.** Si el $P_{(x)} \geq 0$, se toman los intervalos positivos; si el $P_{(x)} \leq 0$, se toman los intervalos negativos, obteniendo así el intervalo solución.

***Ejemplo:***

Resuelve: $\underbrace{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}_{P_{(x)}} \leq 0$

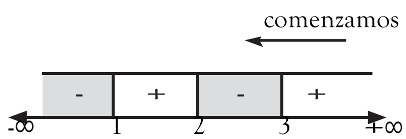
***Resolución:***

Factorizando $(x - 1)(x - 2)(x - 3) \leq 0$

Hallando los puntos críticos:

$$P.C. = \{1; 2; 3\}$$

Ubicando en la recta numérica:




Luego como $P_{(x)} \leq 0$, tomamos los negativos:

$$x \in \langle -\infty; 1] \cup [2; 3]$$

***Ejemplo:***

Resuelve:

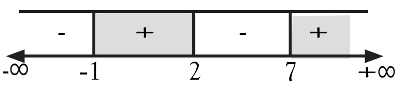
$(x^2-2x+4)(x+3)^2(x-7)^3(x+1)(x-2) \geq 0$

***Resolución:***

- El trinomio $(x^2 - 2x + 4)$ tiene $D = -12$, negativo, coeficiente principal positivo, por lo tanto es **(+)** $\forall$ x $\in$ R. Se descarta o pasa a dividir sin alterar el sentido.

- El factor $(x + 3)^2$ se descarta, pero su punto crítico $x = -3$ cumple con la desigualdad, al final debe estar contenido en la solución.

- El factor $(x - 7)^3$ es reemplazado por $(x - 7)$. Luego tenemos:
  $(x - 7)(x + 1)(x - 2) \geq 0.$
  P.C. = **{**-1; 7; 2**}**




Ubicando en la recta:

Luego como $P_{(x)} \geq 0$ se toman los puntos **(+)** más el punto crítico $x = -3$

$$x \in [-1; 2] \cup [7; +\infty\rangle \cup \{-3\}$$

## Ejercicios Resueltos

**1.** Resuelve:

$$\sqrt{6}x^2 - 2\sqrt{2}x - \sqrt{3}x + 2 \leq 0$$

***Resolución:***

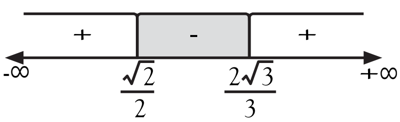
Dándole una forma adecuada al primer miembro y factorizando:

$$\sqrt{6}x^2 - (2\sqrt{2} + \sqrt{3})x + 2 \leq 0$$

aplicando aspa simple
$\sqrt{2}\,x \qquad -1$
$\sqrt{3}\,x \qquad -2$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};\ x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Estos son los "puntos críticos"




¥ C.S. = $[\sqrt{2}/2; 2\sqrt{3}/3]$

**2.** Señala el valor de "a" para el cual el sistema:

$x^2 - 4x + 3 < 0$ ... (1)
$x^2 - 2x + 4 \leq 6 - x$ ... (2)
$x \geq a$ ... (3)

se verifica para un único valor entero de "x".

***Resolución:***

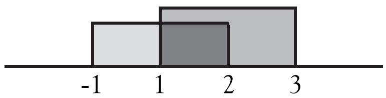
Resolviendo (1):
$x^2-4x+3 < 0 \Rightarrow (x-1)(x-3) < 0$

Luego: $1 < x < 3$

Resolviendo (2):
$x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x-2)(x+1) \leq 0$

Luego: $-1 \leq x \leq 2$

Graficando los resultados:




Luego, el único valor entero es 2.

**3.** ¿Entre qué límites debe variar "m" para que la inecuación: $x^2 + 2mx + m > 3/16$ se verifique para todo valor real de "x"?

***Resolución:***

De la inecuación tenemos:

$$x^2 + 2mx + m - 3/16 > 0$$

si se verifica $\forall$ x $\in$ R, debe cumplirse:

$$\underbrace{1}_{\text{coef. de "}x^2\text{"}} > 0\ ;\ \underbrace{(2m)^2 - 4(1)(m - 3/16)}_{\text{discriminante}} < 0$$

De lo último se tiene:

$16\,m^2 - 16\,m + 3 < 0$
$\rightarrow (4m - 1)(4m - 3) < 0$

Luego los puntos críticos son:

$m = 1/4\ ;\ \ m = 3/4$

Así tenemos:


Por lo tanto:

$$1/4 < m < 3/4$$

## Resolviendo en clase

**1** Resuelve:

$$(x + 5)(x + 3)(x - 7) \leq 0$$

*Resolución:*

***Rpta:***

**2** Resuelve:

$$x^3 < 9x$$

*Resolución:*

***Rpta:***

**3** Resuelve:

$$x^3 - 5x + 6x \geq 0$$

*Resolución:*

***Rpta:***

**4** Resuelve:

$$(x + 4)(x + 6)(x + 8) \geq 0$$

*Resolución:*

***Rpta:***

**5** **Resuelve:**

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6 > 0$$

***Resolución:***

***Rpta:***

**6** **Resuelve:**

$$x^3 \leq 16x$$

***Resolución:***

***Rpta:***

## Ahora en tu cuaderno

**7.** Resuelve:

$$x^3 > x$$

**8.** Resuelve:

$$x^4 + 2x^3 - 9x^2 - 2x + 8 > 0$$

halla un intervalo de su solución.

**9.** Resuelve:

$$x^5 - 5x^4 + 2x^3 + 14x^2 - 3x - 9 < 0$$

**10.** Resuelve:

$$(x^2 + 1)(x^2 + 2)(x - 3) > 0$$

**11.** Resuelve:

$$(x^2 - x - 2)(x - 4) \geq 0$$

**12.** Resuelve:

$$x(x - 1)^2 > 0$$

## Para reforzar

1. Resuelve: $(x + 1)(x + 3)^2(x - 7)^5(x - 2) \geq 0$

a) $[-1, 2] \cup [7, \infty> \cup \{-3\}$
b) $[1, 2] \cup [7, \infty> - \{-3\}$
c) R
d) $\varphi$
e) N. A.

2. Resuelve: $(x^2 + 1)(x - 3)^5(x - 7)(2 - x) \leq 0$

a) $x \in [2, 3] \cup [7, \infty>$
b) $x \in <-\infty, 2] \cup [3, 7]$
c) $x \in [3, 7]$
d) $x \in R$
e) $x \in \varphi$

3. Resuelve:

$$\frac{x - a}{x - b} > \frac{x + b}{x + a}$$

si: $a > b > 0$

a) $-a < x < -b$ b) $a < x < -b$
c) $a < x < b$
d) $-a < x < b$ e) $b < x < a$

4. Resuelve:

$$\frac{x + 4}{x + 2} \geq \frac{x + 2}{x - 4}$$

a) $x \in [2, 4]$ b) $x \in <2, 4>$
d) $x \in <-\infty, 2> \cup <4, \infty>$
c) $x \in <1, 3>$ e) N. A.

5. Resuelve:

$$\frac{(x + 4)(x - 2)}{(x + 1)(x - 3)} \leq 0$$

a) $[-4, 1> \cup [2, 3>$ b) R
c) $<-\infty, -4> \cup [-1, 2>$
d) $[-4, 4]$ e) $\varphi$

6. Resuelve:

$$\frac{(x^2 - 1)(x^2 - 4)}{x^2 + 3x} \geq 0$$

indica un intervalo solución.

a) $<1, 2>$ b) $<-\infty, -3]$
c) $[-1, 0]$
d) $<-3, -2]$ e) N. A.

7. Resuelve:

$$\frac{x + 1}{2 - x} \leq \frac{x}{x + 3}$$

si su C.S. = $<-\infty, a> \cup <b, \infty>$, halla $ab + a + b$

a) -1 b) -5 c) -6
d) -7 e) -8

8. Resuelve:

$$\frac{x^2}{x + 2} > \frac{4}{x + 2} - 2$$

a) $x \in <-2, 0>$ b) $x \in <0, 2>$
c) $x \in <0, \infty>$
d) $x \in \varphi$ e) $x \in <0, \infty>$

9. Si la expresión:

$$\frac{x}{x - 1} - \frac{2}{x + 1} - \frac{2}{x^2 - 1}$$

es una cantidad no negativa, calcula el intervalo al cual pertenece "x".

a) $<-\infty, -2> \cup <-1, 1> \cup <3, \infty>$
b) $<-\infty, -2] \cup <-1, 1> \cup [3, \infty>$
c) $<-\infty, -1> \cup <1, \infty>$
d) $<-\infty, -2] \cup <-1, 3> - \{1\}$
e) $[-2, -1> \cup <1, 3>$

10. Resuelve:

$$\frac{3x - 2}{x + 1} < \frac{4}{x - 2}$$

halla un intervalo de la solución.

a) $<1, 2>$ b) $<-2, 1>$ c) $<2, 4>$
d) $<-1, 2>$ e) N. A.

11. Halla una inecuación entera de coeficientes racionales de grado mínimo, cuya solución es:
$<-\infty, -2> \cup <-2, 2> \cup <3, \infty>$

a) $(x - 3)(x - 2)(x + 2)^2 > 0$
b) $(x + 3)(x + 2)^3 > 0$
c) $(x - 3)(x - 2)^2(x + 2) < 0$
d) $(x - 3)^2(x - 2)(x + 2) > 0$
e) $(x + 3)(x + 2)^2(x - 2) \leq 0$

12. Resuelve:

$$\frac{(x^2 - 9)(x + 5)^4(x + 8)(x - 2)^3}{(x - 5)(x + 1)} \leq 0$$

e indica el mínimo valor entero que puede tomar "x".

a) -3 b) -7 c) -8
d) 5 e) 1