Triángulo Educativo
Álgebra — 4° Secundaria

INECUACIONES IRRACIONALES

Una inecuación irracional en una variable tiene la forma:

$$\boxed{P_{(x)} \lessgtr 0}$$

donde "$P_{(x)}$" es una expresión algebraica irracional.

TEOREMA 1

$$x, y \ \ R;\ n \ \ N;\ \sqrt[2n]{x} + \sqrt[2n]{y} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge y \geq 0$$

TEOREMA 2

$$x, y \ \ R:\ \sqrt{x} < y \text{ ; si y sólo si } (x \geq 0 \wedge y > 0 \wedge x \leq y^2)$$

TEOREMA 3

$$y < 0 \ ;\ x \geq y \Leftrightarrow x \geq 0$$

TEOREMA 4

$$y \geq 0 \ ;\ x > y \Leftrightarrow x \geq 0 \wedge x > y^2$$

Ejercicios Resueltos

1. Resuelve x R:

$$\sqrt{2x+6} > x + 1$$

Resolución:

Aplicamos:

$$\sqrt{a} \geq b \Leftrightarrow [\underbrace{(b \geq 0) \Rightarrow a \geq b^2)}_{P} \vee \underbrace{(b < 0 \Rightarrow a \geq 0)}_{Q}]$$

P: Si

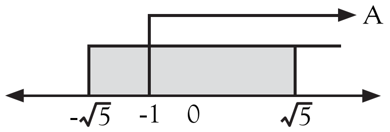
$x + 1 \geq 0 \Rightarrow (\sqrt{2x+6})^2 > (x+1)^2$

$x \geq -1 \Rightarrow 2x + 6 > x^2 + 2x + 1$

$5 > x^2$

$x^2 < 5$

$\underbrace{x \geq -1}_{A} \Rightarrow \quad -\sqrt{5} < x < \sqrt{5}$



$P = [-1, \sqrt{5}>$

Q: Si $\quad x + 1 < 0 \Rightarrow 2x + 6 \geq 0$ x

$< -1 \Rightarrow x \geq -3$

$Q = [-3, -1>$

Conclusión: $P \cup Q = [-3, \sqrt{5}>$

2. Resuelve x R: $\sqrt{x+2} < 2x - 1$

Resolución:

El universo solución es $x + 2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -2$

Si $\quad 2x - 1 > 0 \Rightarrow \{(\sqrt{x+2})^2 < (2x-1)^2\}$

$x > 1/2 \Rightarrow \{\ x + 2 < 4x^2 - 4x + 1\}$

$x > 1/2 \Rightarrow \{0 < 4x^2 - 5x - 1\}$

$x > 1/2 \Rightarrow \{0 < x^2 - 5/4x - 1/4\}$

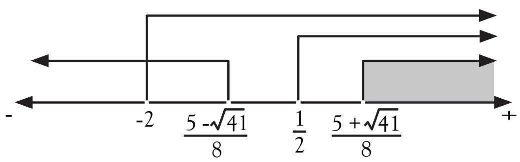
$x > 1/2 \Rightarrow \{0 < x^2 - 5/4x + 25/64 - 25/64 - 1\}$

$x > 1/2 \Rightarrow \{0 < (x - 5/8)^2 - 41/64\}$

$x > 1/2 \Rightarrow \{(x - 5/8)^2 > 41/64\}$

$x > 1/2 \Rightarrow \{(x - 5/8 > \sqrt{41}/8 \vee x - 5/8 < -\sqrt{41}/8\}$

$\underbrace{x > 1/2}_{A} \Rightarrow \{(x > (5 + \sqrt{41})/8 \vee x < (5 - \sqrt{41})/8\}$



C.S. = x $<(5 + \sqrt{41})/8, \infty>$

3. Resuelve: $\sqrt{x^2 - 2x - 24} > -4$

Resolución:

I. Análisis:

El primer miembro de la inecuación propuesta es siempre positivo, luego la inecuación se satisface para todo valor de x que pertenece al campo de la variación.

$x^2 - 2x - 24 \geq 0$

$\Rightarrow (x - 6)(x + 4) \geq 0$

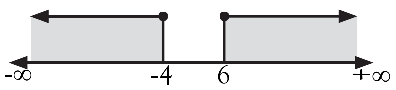
$[x - 6 \geq 0 \wedge x + 4 \geq 0] \vee$

$[x - 6 \leq 0 \wedge x + 4 \leq 0]$

$(x \geq 6 \wedge x \geq -4) \vee (x \leq 6 \wedge x \leq -4)$

$x \geq 6 \vee x \leq -4$

II. Ilustración gráfica:



$\therefore$ $S_F \Rightarrow x \in \langle -\infty, -4] \cup [6, \infty\rangle$

4. Resuelve: $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x} < 3$

Resolución:

I. Análisis:

$x + 3 \geq 0 \quad \wedge \quad x \geq 0$

$x \geq -3 \wedge x \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$

$\therefore S_1 = [0, \infty\rangle$

II. Eliminando radicales:

$(\sqrt{x + 3} + \sqrt{x})^2 < 3^2$

$2x + 3 + 2\sqrt{x}\sqrt{x + 3} < 9$

$\sqrt{x}\sqrt{x + 3} < 3 - x \wedge 3 - x > 0$

$x^2 + 3x < x^2 - 6x + 9 \wedge x < 3$

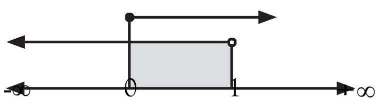
$9x < 9$

$x < 1 \quad \wedge x < 3$

$\Rightarrow x < 1$

$\therefore S_2 = \langle -\infty, 1\rangle$

III. La gráfica: $S_1 \cap S_2$



$\therefore$ $S_F = x \in [0, 1\rangle$

5. Resuelve: $\sqrt{x^2 - 2x - 48} > x - 4$

Resolución:

I. Análisis:

Dominio de la variable contenida en el radical.

$x^2 - 2x - 48 \geq 0$

$(x + 6)(x - 8) \geq 0$

$(x + 6 \geq 0 \wedge x - 8 \geq 0) \vee (x + 6 \leq 0 \wedge x - 8 \leq 0)$

$(x \geq -6 \wedge x \geq 8) \vee (x \leq -6 \wedge x \leq 8)$

$x \geq 8 \vee x \leq -6$

$\therefore S_1 = x \in \langle -\infty, -6] \cup [8, \infty\rangle$

II. $\sqrt{x^2 - 2x - 48} > x - 4 \wedge x - 4 < 0$

$x^2 - 2x - 48 > x^2 - 8x + 16 \wedge x \geq 4$

$6x > 64$

$x > 32/3 \quad \wedge \quad x \geq 4$

$\therefore S_2 = \langle 32/3, \infty\rangle$

III. $\sqrt{x^2 - 2x - 48} > x - 4 \wedge x - 4 < 0$

$x^2 - 2x - 48 \geq 0 \quad \wedge \quad x < 4$

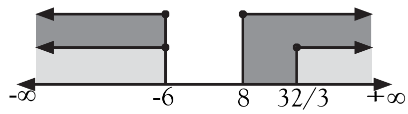
$(x + 6)(x - 8) \geq 0$

$x \geq 8 \wedge x \leq -6 \quad \wedge \quad x < 4$

$x \leq -6$

$\therefore S_3 = x \in \langle -\infty, -6]$

IV. Gráfica: $S_F = S_1 \cap (S_2 \cup S_3)$



$\therefore$ $S_F = x \in \langle -\infty, -6] \cup \langle 32/3, \infty\rangle$

Resolviendo en clase

1 Resuelve:

$$\sqrt{5x - 2} \geq 3$$

Resolución:

Rpta:

2 Resuelve:

$$\sqrt{2 - 2x} < 4$$

Resolución:

Rpta:

3 Resuelve:

$$\sqrt{3x + 1} > -2$$

Resolución:

Rpta:

4 Resuelve:

$$\sqrt{x^2 - 8x + 30} > -2$$

Resolución:

Rpta:

5 **Resuelve:**

$$\sqrt{2x + 6} > x + 1$$

Resolución:

Rpta:

6 **Resuelve:**

$$\sqrt{5 - 2x} > \sqrt{9 - 4x}$$

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Resuelve:

$$\sqrt{x^2 - 7x + 10} < x - 3$$

a) $[-3, 5>$ b) $[5, \infty>$ c) $[3, 5>$
d) $[-5, 3>$ e) $<-5, -3]$

8. Resuelve:

$$\sqrt{x + 6} < x$$

a) $[-3, \infty>$ b) $<-\infty, -2]$ c) $<-\infty, -3]$
d) $[-3, 2]$ e) $<3, \infty>$

9. Resuelve:

$$\sqrt[3]{-2x^2 + x + 1} < 1$$

a) $<-\infty, 0> \cup <1/2, \infty>$
b) $[0, 1/2]$
c) $<-1/2, \infty>$
d) $<-\infty, -1/2> \cup <0, \infty>$
e) $[0, \infty>$

9. Resuelve:

$$\sqrt{4 + 3x} - \sqrt{5x - 6} < 0$$

a) $<2, \infty>$ b) $<3, \infty>$
c) $<-3/4, 6/5]$
d) $<-\infty, 0]$ e) $<5, \infty>$

10. Resuelve:

$$\sqrt{x^2 - 3x + 12} > 4$$

a) $[-1, 0] \cup <4, \infty>$
b) $<-\infty, -1> \cup <4, \infty>$
c) $[-4, 1] \cup [2, \infty>$
d) $<-\infty, -4] \cup [0, \infty>$
e) $<-\infty, -4> \cup <1, \infty>$

12. Resuelve:

$$\sqrt{4x - 20} < 2\sqrt{x - 2}$$

a) $[4, \infty>$ b) $[5, \infty>$
c) $<-\infty, -4]$
d) $<-\infty, -2]$ e) $<-\infty, 2]$

Para reforzar

1. Resuelve:

$$\sqrt{5 - x} < 3$$

a) [-5, ∞> b) <-∞, 5] c) <-4, 5]
d) <2, 5] e) [-5, 4>

2. Resuelve:

$$\sqrt{x + 6} \geq -1$$

a) [-7, ∞> b) [-5, ∞> c) [-6, -1]
d) <-6, -1] e) [-6, ∞>

3. Resuelve:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 24} > -3$$

a) <-∞, -4] ∪ [6, ∞>
b) <-∞, 4] ∪ [6, ∞>
c) <-∞, -6] ∪ [4, ∞>
d) <-∞, -4] ∪ [6, 14]
e) [-4, 2] ∪ [6, ∞>

4. Resuelve:

$$\sqrt{x - 5} + \sqrt{2x - 6} + 4 < 1$$

a) [3, 5> b) <3, 5]
c) <-∞, -3] ∪ [5, ∞>
d) [-3, 5] e))

5. Resuelve:

$$\sqrt{x^2 - x - 6} < 6 - x$$

a) <-∞, -2] ∪ [3, 42/11>
b) <-∞, 2] ∪ [3, ∞>
c) <-∞, -3] ∪ [-2, 11>
d) <-3, 11/3]
e) R

6. Resuelve:

$$\sqrt{2x - 3} > \sqrt{5x + 9}$$

a) <-∞, 3/2> b) <-∞, -9/5] c) [-9/5, 3/2]
d) R e) ∅

7. Resuelve:

$$\sqrt{x^2 - 2x - 15} > x + 1$$

a) <-∞, -3] b) <-∞, -1]
c) [-3, -1]
d) [-3, ∞> e) [-1, ∞>

8. Resuelve:

$$\sqrt{x^2 - 4x - 21} < 3 - x$$

a) <-∞, -3] b) <-∞, 3]
c) <-∞, 7]
d) [7, ∞> e) [-7, ∞>

9. Resuelve:

$$\sqrt{x - 1} \leq \sqrt{x + 2}$$

a) R b) ∅
c) [-2, ∞>
d) [-2, 1] e) [1, ∞>

10. Resuelve:

$$\sqrt{3x - 1} + x > 4$$

a) [-2, 1]
b) [-2, ∞>
c) <-∞, 3]
d) R
e) <$(11 - \sqrt{53})/2$, ∞>

11. Resuelve:

$$\sqrt{2x + 3} > \sqrt{2x + 4}$$

a) [-2, ∞> b) [-3/2, ∞>
c) [-2, -3/2]
d) R e) ∅

12. Resuelve:

$$\sqrt{x + 2} - \sqrt[3]{x + 8} < 0$$

a) [-2, ∞> b) [-8/3, ∞]
c) <-∞, -8/3]
d) <-∞, -2] e) [-8/3, -2]