



# Trigonometría

## IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS DE LA SUMA Y DIFERENCIA DE DOS ARCOS

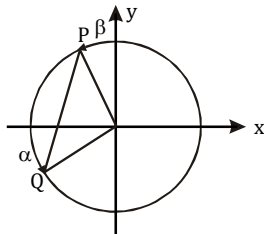
### INTRODUCCIÓN

Este capítulo constituye la generalización de las identidades trigonométricas y esto se da porque a partir de aquí encontraremos relacionadas entre las identidades que efectúen entre sí operaciones algebraicas de adición o sustracción.

En este capítulo compararemos que las identidades trigonométricas no son algebraicas como por ejemplo:

$\text{Sen}(x+y) = \text{Sen}x + \text{Sen}y$ , de este modo el resultado del operador (Sen) y el número (x+y), no es una operación algebraica de simple multiplicación, sino una operación de tipo trascendente.

Tomemos dos puntos cualesquiera  $P(\text{cos}\beta; \text{Sen}\beta)$  y  $Q(\text{Cos}\alpha; \text{Sen}\alpha)$  que están en una circunferencia trigonométrica.



Entonces calculando la distancia PQ :

$$\Rightarrow PQ = \sqrt{(\text{Cos}\alpha - \text{Cos}\beta)^2 + (\text{Sen}\alpha - \text{Sen}\beta)^2}$$

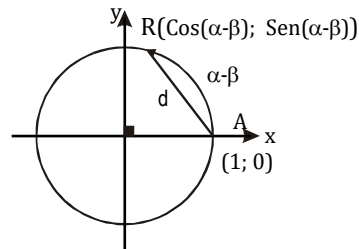
$$\Rightarrow PQ = \sqrt{2 - 2\text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta - 2\text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta} \dots (a)$$

$$P = (\text{Cos}\beta; \text{Sen}\beta)$$

$$Q = (\text{Cos}\alpha; \text{Sen}\alpha)$$

$$\angle P = \alpha - \beta$$

Ahora tomemos un arco igual a  $(\alpha - \beta)$  en el primer cuadrante con una cuerda «d» :



de los gráficos  $QP = AR = d$

$$\Rightarrow d = \sqrt{(1 - \text{Cos}(\alpha - \beta))^2 + (0 - \text{Sen}(\alpha - \beta))^2}$$

$$\Rightarrow d = \sqrt{2 - 2\text{Cos}(\alpha - \beta)} \dots (b)$$

Luego de:

\* (a) = (b) tenemos :

$$\Rightarrow 2 - 2\text{Cos}(\alpha - \beta) = 2 - 2(\text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta + \text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta)$$

$$\therefore \boxed{\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta + \text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta} \dots (1)$$

\* Sustituyendo  $\beta$  por  $-\beta$

$$\Rightarrow \text{Cos}(\alpha - (-\beta)) = \text{Cos}\alpha \text{Cos}(-\beta) + \text{Sen}\alpha \text{Sen}(-\beta)$$

$$\therefore \boxed{\text{Cos}(\alpha + \beta) = \text{Cos}\alpha \text{Cos}\beta - \text{Sen}\alpha \text{Sen}\beta} \dots (2)$$

\* Se sabe que :

$$\begin{aligned} \text{Sen}(\alpha + \beta) &= \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{2} - (\alpha + \beta) \right\} \\ \Rightarrow \text{Sen}(\alpha + \beta) &= \text{Cos} \left( \left\{ \frac{\pi}{2} - \beta \right\} - \alpha \right) \\ \Rightarrow \text{Sen}(\alpha + \beta) &= \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{2} - \beta \right\} \text{Cos} \alpha + \text{Sen} \left\{ \frac{\pi}{2} - \beta \right\} \text{Sen} \alpha \end{aligned}$$

$$\therefore \boxed{\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen} \alpha \text{Cos} \beta + \text{Cos} \alpha \text{Sen} \beta} \quad \dots (3)$$

$\begin{aligned} * \text{Cos} \left\{ \frac{\pi}{2} - \beta \right\} &= \text{Sen} \beta \\ * \text{Sen} \left\{ \frac{\pi}{2} - \beta \right\} &= \text{Cos} \beta \end{aligned}$
--

\* Sustituyendo  $\beta$  por  $-\beta$

$$\Rightarrow \text{Sen}(\alpha + (-\beta)) = \text{Sen} \alpha \text{Cos}(-\beta) + \text{Cos} \alpha \text{Sen}(-\beta)$$

$$\therefore \boxed{\text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen} \alpha \text{Cos} \beta - \text{Cos} \alpha \text{Sen} \beta} \quad \dots (4)$$

En conclusión:

**I. Para la suma de Arcos:**

$\text{Sen}(\alpha + \beta) = \text{Sen} \alpha \cdot \text{Sen} \beta + \text{Cos} \alpha \cdot \text{Cos} \beta$
$\text{Cos}(\alpha + \beta) = \text{Cos} \alpha \cdot \text{Cos} \beta - \text{Sen} \alpha \cdot \text{Sen} \beta$

**II. Para la diferencia de Arcos:**

$\text{Sen}(\alpha - \beta) = \text{Sen} \alpha \cdot \text{Cos} \beta - \text{Cos} \alpha \cdot \text{Sen} \beta$
$\text{Cos}(\alpha - \beta) = \text{Cos} \alpha \cdot \text{Cos} \beta + \text{Sen} \alpha \cdot \text{Sen} \beta$



## Resolviendo en clase

1 Determinar el valor de:

$$L = \frac{\text{Sen}(\alpha + \theta) - \text{Sen}\alpha \cdot \text{Cos}\theta}{\text{Cos}\alpha \cdot \text{Cos}\theta}$$

*Resolución:*

*Rpta:*

2 Calcular el valor de: “Cos 67°”

*Resolución:*

*Rpta:*

3 Calcular el valor de: “Cos 7°”

*Resolución:*

*Rpta:*

4 Determinar el valor de:

$$E = \text{Cos}25^\circ \cdot \text{Cos}35^\circ - \text{Sen}35^\circ \cdot \text{Sen}25^\circ$$

*Resolución:*

*Rpta:*

5 Determinar el valor de:

$$M = \frac{\cos(\alpha - \beta)}{\operatorname{Sen}\alpha \cdot \operatorname{Cos}\beta} - \operatorname{Ctg}\beta$$

*Resolución:*

*Rpta:*

6 Calcular el valor de:

$$P = \operatorname{Cos}20^\circ \cdot \operatorname{Cos}17^\circ - \operatorname{Sen}17^\circ \operatorname{Sen}20^\circ$$

*Resolución:*

*Rpta:*

## Ahora en tu cuaderno

7. Determinar el valor de:

$$N = \operatorname{Cos}(x - 30^\circ) - \operatorname{Cos}(x + 30^\circ)$$

8. Calcular el valor de:

$$E = \frac{\operatorname{Cos}20^\circ \cdot \operatorname{Cos}10^\circ - \operatorname{Sen}20^\circ \cdot \operatorname{Sen}10^\circ}{\operatorname{Sen}25^\circ \cdot \operatorname{Cos}5^\circ + \operatorname{Sen}5^\circ \cdot \operatorname{Cos}25^\circ}$$

9. Calcular el valor de:

$$E = (\operatorname{Cos}50^\circ + \operatorname{Cos}20^\circ)^2 + (\operatorname{Sen}50^\circ + \operatorname{Sen}20^\circ)^2$$

10. Determinar el valor de:

$$P = \frac{\operatorname{Sen}(y - x)}{\operatorname{Cos}y \cdot \operatorname{Cos}x} + \operatorname{Tgx}$$

11. Si:

$$\operatorname{Sen}x \cdot \operatorname{Cos}y = \frac{1}{3}$$

$$\operatorname{Sen}y \cdot \operatorname{Cos}x = \frac{1}{2}$$

$$\text{Hallar: } E = 6\operatorname{Cos}(x + y)$$

12. Si:  $\operatorname{Sen}x = 5/13 \wedge \operatorname{Tg}y = 3/4$

$$\text{Calcular: } \operatorname{Sen}(x + y)$$

## Para reforzar

1. Calcular el valor de:

$$E = \text{Sen}30^\circ \cdot \text{Cos}7^\circ + \text{Sen}7^\circ \cdot \text{Cos}30^\circ$$

- a)  $\text{Sen}23^\circ$       b)  $\text{Cos}7^\circ$       c)  $\text{Sen}37^\circ$   
d)  $\text{Sen}7^\circ$                       e)  $\text{Cos}37^\circ$

2. Calcular un valor agudo de "x", si:

$$\text{Cos}x \cdot \text{Cos}10^\circ - \text{Sen}10^\circ \cdot \text{Sen}x = \text{Cos}80^\circ$$

- a)  $60^\circ$                       b)  $50^\circ$                       c)  $70^\circ$   
d)  $90^\circ$                       e)  $100^\circ$

3. Determinar el valor de:

$$M = \text{Cos}72^\circ \cdot \text{Cos}12^\circ + \text{Sen}12^\circ \cdot \text{Sen}72^\circ$$

- a)  $1/2$                       b)  $2$                       c)  $1$   
d)  $-2$                       e)  $-1/2$

4. Determinar el valor de:

$$P = \frac{\text{Sen}3x \cdot \text{Cos}4x + \text{Sen}4x \cdot \text{Cos}3x}{\text{Sen}5x \cdot \text{Cos}2x + \text{Sen}2x \cdot \text{Cos}5x}$$

- a)  $\text{Cos}7x$                       b)  $\text{Sen}7x$                       c)  $1$   
d)  $\text{Sen}x$                       e)  $\text{Cos}3x$

5. Calcular el valor de:

$$E = \text{Sen}42^\circ \cdot \text{Cos}5^\circ - \text{Sen}5^\circ \cdot \text{Cos}42^\circ$$

- a)  $\text{Cos}37^\circ$                       b)  $\text{Sen}47^\circ$                       c)  $\text{Sen}37^\circ$   
d)  $\text{Cos}47^\circ$                       e)  $\text{Sen}38^\circ$

6. Determinar el valor de:

$$E = \frac{\text{Sen}x \cdot \text{Cos}y - \text{Sen}(x+y)}{\text{Sen}y}$$

- a)  $\text{Sen}x$                       b)  $\text{Cos}y$                       c)  $-\text{Sen}y$   
d)  $-\text{Cos}x$                       e)  $-\text{Sen}x$

7. Calcular el valor de:

$$M = \frac{\text{Cos}(x+y) + \text{Sen}x \cdot \text{Sen}y}{\text{Cos}y}$$

- a)  $\text{Cos}x$                       b)  $\text{Cos}y$                       c)  $\text{Sen}x$   
d)  $\text{Sen}y$                       e)  $-\text{Sen}x$

8. Calcular el valor de:

$$M = \frac{\text{Sen}60^\circ \cdot \text{Cos}30^\circ - \text{Sen}30^\circ \cdot \text{Cos}60^\circ}{\text{Sen}15^\circ \cdot \text{Cos}75^\circ + \text{Sen}75^\circ \cdot \text{Cos}15^\circ}$$

- a)  $2$                       b)  $0$                       c)  $1/3$   
d)  $1/2$                       e)  $1$

9. Calcular el valor de: "Sen 16"

- a)  $7/25$                       b)  $24/25$                       c)  $7/24$   
d)  $24/7$                       e)  $25/24$

10. Calcular el valor de:

$$E = \text{Sen}19^\circ \cdot \text{Cos}18^\circ + \text{Sen}18^\circ \cdot \text{Cos}19^\circ$$

- a)  $4/5$                       b)  $3/5$                       c)  $3/4$   
d)  $4/3$                       e)  $5/4$

11. Determinar el valor de:

$$J = \frac{\text{Sen}5x \cdot \text{Cos}3x - \text{Sen}3x \cdot \text{Cos}5x}{\text{Cos}4x \cdot \text{Cos}2x + \text{Sen}4x \cdot \text{Sen}2x}$$

- a)  $\text{Tg}x$                       b)  $\text{Tg}5x$                       c)  $\text{Tg}2x$   
d)  $\text{Tg}4x$                       e)  $1$

12. Calcular un valor agudo de "x"; si:

$$\text{Cos}5x \cdot \text{Cos}3x + \text{Sen}3x \cdot \text{Sen}5x = \text{Cos}60^\circ$$

- a)  $60^\circ$                       b)  $20^\circ$                       c)  $40^\circ$   
d)  $30^\circ$                       e)  $50^\circ$