Triángulo Educativo

Trigonometría

3º SECUNDARIA

IDENTIDADES TRIGONOMETRICAS I

Son aquellas igualdades entre las razones trigonométricas de una cierta variable, las cuales se verifican para todo valor admitido por la variable.

Mot

Ejemplo:

$$\text{Csc}\theta = \frac{1}{\text{Sen}\theta}$$

Es una identidad trigonométrica, porque se verifica la igualdad para todo valor de “” diferente a 180ºn: (0º, 180º, 360º, ...)

Probamos para: = 30º, 53º y 270º

- $\text{Csc}30º = \dfrac{1}{\text{Sen}30º}$ ® $2 = \dfrac{1}{\frac{1}{2}}$ 4 $2 = 2$
- $\text{Csc}53º = \dfrac{1}{\text{Sen}53º}$ ® $\dfrac{5}{4} = \dfrac{1}{\frac{4}{5}}$ 4 $\dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{4}$
- $\text{Csc}270º = \dfrac{1}{\text{Sen}270º}$ ® $1 = \dfrac{1}{1}$ 4 $1 = 1$

Así podemos seguir dándole valores a “” y siempre se va a verificar la igualdad pero no para: 0º, 180º, 360º, ...

Ahora estudiaremos:

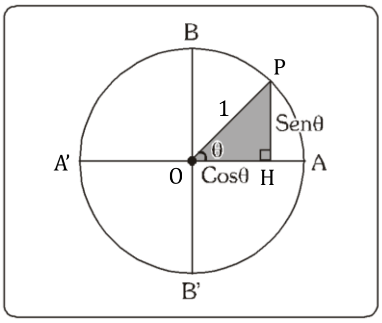
Identidades Recíprocas

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{Sen}\theta\cdot\text{Csc}\theta = 1\,;\forall\theta\neq n\pi\,,\,n\in\mathbb{Z} & \Rightarrow \text{Csc}\theta = \dfrac{1}{\text{Sen}\theta} \\ \text{Cos}\theta\cdot\text{Sec}\theta = 1\,;\forall\theta\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\,,\,n\in\mathbb{Z} & \Rightarrow \text{Sec}\theta = \dfrac{1}{\text{Cos}\theta} \\ \text{Tg}\theta\cdot\text{Ctg}\theta = 1\ \ ;\forall\theta\neq n\dfrac{\pi}{2},\,n\in\mathbb{Z} & \Rightarrow \text{Ctg}\theta = \dfrac{1}{\text{Tg}\theta} \end{array}}$$

Identidades de División

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{Tg}\theta = \dfrac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}\ \ ;\forall\theta\neq(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\ ;\ n\in\mathbb{Z} \\ \text{Ctg}\theta = \dfrac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}\,;\forall\theta\neq n\pi\ ;\ n\in\mathbb{Z} \end{array}}$$

Para obtener dichas identidades, estimado alumno, hacemos uso de la circunferencia trigonométrica que ya estudiamos.



IDENTIDAD

En matemática se define una identidad como una igualdad que verifica para todo valor admitido de variable real.

Ejemplo:

$$(x-3)(x+3) = x^2 - 9\ ;\ x\in\mathbb{R}$$

En esta identidad, al sustituir **x** por un número real cualquiera, se obtiene en ambos miembros de la igualdad un mismo valor real.

Ejemplo:

$$\frac{x^2-4}{x-2} = x+2\quad;\quad x\in\mathbb{R}-\{2\}$$

En esta igualdad, la identidad sólo se verifica para todos los valores reales de **x**, menos el valor 2.

a) Identidades Recíproca

En el ⊿ OPH:

- $\text{Csc}\theta = \dfrac{OP}{PH}\ \Rightarrow\ \text{Csc}\theta = \dfrac{1}{\text{Sen}\theta}\ \Rightarrow\ \boxed{\text{Sen}\theta\cdot\text{Csc}\theta = 1}$
- $\text{Sec}\theta = \dfrac{OP}{OH}\ \Rightarrow\ \text{Sec}\theta = \dfrac{1}{\text{Cos}\theta}\ \Rightarrow\ \boxed{\text{Cos}\theta\cdot\text{Sec}\theta = 1}$
- $\begin{array}{l}\text{Tg}\theta = \dfrac{PH}{OH}\\ \text{Ctg}\theta = \dfrac{OH}{PH}\end{array}\ \Rightarrow \text{Tg}\theta.\text{Ctg}\theta = \dfrac{PH}{OH}\cdot\dfrac{OH}{PH}\Rightarrow\ \boxed{\text{Tg}\theta\cdot\text{Ctg}\theta = 1}$

b) Identidad por Cociente

En el ⊿ OPH:

- $\text{Tg}\theta = \dfrac{PH}{OH}\ \Rightarrow\ \boxed{\text{Tg}\theta = \dfrac{\text{Sen}\theta}{\text{Cos}\theta}}$
- $\text{Ctg}\theta = \dfrac{OH}{HP}\Rightarrow\ \boxed{\text{Ctg}\theta = \dfrac{\text{Cos}\theta}{\text{Sen}\theta}}$

Los ejercicios en este capítulo son de tipo demostración, simplificación. Para resolverlos se requiere un manejo eficiente de las identidades ya mencionadas.

Observación

En una identidad trigonométrica la variable angular es la misma para todas las razones trigonométricas.

Ejemplos:

- Sen20º × Csc20º = 1
- Tg3x × Ctg3x = 1
- $\text{Ctg}18º = \dfrac{\text{Cos}18º}{\text{Sen}18º}$

APLICACIONES

1. Demuestra que: SenCtgSec= 1

   En este caso, desarrollaremos el primero miembro.

$$\cancel{\text{Sen}\theta}\cdot\frac{\cancel{\text{Cos}\theta}}{\cancel{\text{Sen}\theta}}\cdot\frac{1}{\cancel{\text{Cos}\theta}} = 1$$

$\Rightarrow\ 1 = 1$

2. Demostrar que: Tg^{2}θ ·CtgθCos= Sen

   Senθ=Senθ

Resolviendo en clase

1 El equivalente de la expresión:

$$P = \left(\frac{\text{Sec}\theta}{\text{Csc}\theta}\right) \cdot \text{Ctg}\theta$$

Resolución:

Rpta:

2 La expresión:

$$E = \frac{1 + \text{Senx}}{\text{Cosx}} - \text{Tgx}$$

es igual a:

Resolución:

Rpta:

3 Simplificar:

$$M = \text{Tgx} \; . \; \text{Cosx} \; + \; \text{Sen}^2\text{x} \; . \; \text{Cscx}$$

Resolución:

Rpta:

4 Simplificar:

$$P = \text{Sen}^3\theta . \; \text{Csc}^2\theta + \text{Cos}^2\theta . \; \text{Tg}\theta$$

Resolución:

Rpta:

5 Si la expresión es una identidad:

$$\frac{1-\text{Cosx}}{\text{Senx}}=\text{A}-\text{Ctgx}$$

Dar el valor de "A"

Resolución:

Rpta:

6 Simplificar:

$$E=\frac{\text{Sen}\theta+\text{Cos}\theta}{\text{Csc}\theta+\text{Sec}\theta}$$

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Simplificar:

$$E=\frac{1+\text{Tg}\theta}{1+\text{Ctg}\theta}$$

8. Simplificar:

$$M = (\text{Sec x} - 1)\text{Ctg x} - \text{Csc x}$$

9. Simplificar

$$E=\frac{\text{Sen}^2\theta\cdot\text{Ctg}\theta}{\text{Cos}^2\theta\cdot\text{Tg}\theta}$$

10. Simplificar:

$$E = \text{Ctg}\theta.\ \text{Sen}^2\theta + \text{Tg}\theta.\ \text{Cos}^2\theta$$

11. Simplificar:

$$K=\frac{1+\text{Tgx}}{\text{Cscx}+\text{Secx}}$$

12. Simplificar:

$$M = (\text{Cscx} + 1)\text{Tgx} - \text{Secx}$$

Para reforzar

1. Simplificar:

$$E = \frac{1+tgx}{Secx} - Senx$$

a) Cosx b) Senx c) Secx
d) Tgx e) Cscx

2. Simplificar:

$$E = \frac{Senx}{Tgx} + \frac{1}{Secx}$$

a) 2Cosx b) 3Cosx c) 4Cosx
d) Secx e) Ctgx

3. El equivalente de la expresión:

$$K = \left(\frac{Csc\theta}{Sec\theta}\right) \cdot Tg\theta$$

a) 1 b) Senθ c) Cosθ
d) Secθ e) $Tg^2\theta$

4. La expresión:

$$P = \frac{1-Cosx}{Senx} + Ctgx$$

a) Secx b) Tgx c) 1
d) Cscx e) Ctgx

5. Simplificar:

$$E = Ctg\,x \, . \, Sen\,x + Cos\,x$$

a) 2 Senx b) Tgx c) Secx
d) 2 Cosx e) Ctg x

6. Simplificar:

$$E = \frac{1+Ctgx}{Cscx} - Cosx$$

a) Sen x b) –Sen x c) 0
d) Cos x e) –Cos x

7. Simplificar:

$$P = Cos\,\theta^3 Sec\,\theta^2 + Sen\theta \, . \, Ctg\theta$$

a) 2Sen b) 2Tg c) 2
d) 2Cos e) 2Sec

8. El equivalente de la expresión:

$$E = Sen^2. Csc + Cos^2. Sec$$

a) 2Sen b) SenCos c) 2
d) 2Cos e) Sen+Cos

9. La expresión:

$$H = Tg\theta.\ Ctg^2\theta.\ Sen\theta$$

es igual a:
a) 1 b) Cosθ c) Sec
d) Cscθ e) $Tg^2\theta$

10. Simplificar:

$$K = Ctgx + \frac{Cscx}{Secx}$$

a) 2Senx b) 2Tgx c) 0
d) 2Cosx e) 2Ctgx

11. Reducir:

$$P = \frac{Cosx}{Ctgx} + \frac{1}{Cscx}$$

a) 1 b) 2Senx c) Senx
d) 2 e) 2Cosx

12. Simplificar:

$$E = \frac{1-Ctg\theta}{Sec\theta - Csc\theta}$$

a) Sen b) Cos c) Tg
d) Sec e) Csc