



# Trigonometría

## IDENTIDADES AUXILIARES

### SIMPLIFICACIONES

En este tipo de aplicaciones se buscará reducir al máximo la expresión con la ayuda de las identidades fundamentales (ya estudiadas).

También podremos considerar en el desarrollo de los problemas a las identidades algebraicas, como por ejemplo:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$$

De las identidades fundamentales se podrán deducir otras, así:

$$\boxed{\text{Sen}^2\theta + \text{Cos}^2\theta = 1}$$

$$\Rightarrow \text{Sen}\theta = 1 - \text{Cos}^2\theta$$

$$\Rightarrow \text{Cos}^2\theta = 1 - \text{Sen}^2\theta$$

### APLICACIÓN

1. Simplificar:

$$E = \frac{\text{Sen}^2\theta - \text{Cos}^2\theta}{\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta} + \text{Cos}\theta$$

→ Recordar:  $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$

→ Adaptamos a la expresión "E" y simplificamos:

$$E = \frac{(\cancel{\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta})(\text{Sen}\theta - \text{Cos}\theta)}{(\cancel{\text{Sen}\theta + \text{Cos}\theta})} + \text{Cos}\theta$$

$$\rightarrow E = \text{Sen}\theta - \text{Cos}\theta + \text{Cos}\theta$$

$$\therefore E = \text{Sen}\theta$$

2. Simplificar:

$$M = \frac{\text{Cos}^2x}{1 - \text{Sen}^2x} + 1$$

→ **Observación:**  $\text{Cos}^2x = 1 - \text{Sen}^2x$

→ Reemplazamos en el denominador:

$$M = \frac{\cancel{\text{Cos}^2x}}{\cancel{\text{Cos}^2x}} + 1$$

$$\rightarrow M = 1 + 1$$

$$\therefore M = 2$$

## IDENTIDADES AUXILIARES

1.  $\operatorname{tg} x + \operatorname{Ctg} x = \operatorname{Sec} x \operatorname{Csc} x$
2.  $\operatorname{Sec}^2 x + \operatorname{Csc}^2 x = \operatorname{Sec}^2 x + \operatorname{Csc}^2 x$
3.  $\operatorname{Sen}^4 x + \operatorname{Cos}^4 x = 1 - 2\operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x$
4.  $\operatorname{Sen}^6 x + \operatorname{Cos}^6 x = 1 - 3 \operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x$

**Demostrar:**

$$\operatorname{Tg} x + \operatorname{Ctg} x = \operatorname{Sec} x \operatorname{Csc} x$$

Sabemos:

$$\operatorname{Tgx} = \frac{\operatorname{Sen}x}{\operatorname{Cos}x} \quad \text{y} \quad \operatorname{Ctg}x = \frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sen}x}$$

$$\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctg}x = \frac{\operatorname{Sen}x}{\operatorname{Cos}x} + \frac{\operatorname{Cos}x}{\operatorname{Sen}x}$$

$$\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctg}x = \frac{\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x}{\operatorname{Cos}x \operatorname{Sen}x}$$

Sabemos:  $\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 1$

$$\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctg}x = \frac{1}{\operatorname{Cos}x \operatorname{Sen}x}$$

Sabemos:

$$\frac{1}{\operatorname{Cos}x} = \operatorname{Sec}x \quad \wedge \quad \frac{1}{\operatorname{Sen}x} = \operatorname{Csc}x$$

$$\therefore \boxed{\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctg}x = \operatorname{Sec}x \operatorname{Csc}x}$$

**Demostrar:**

$$\operatorname{Sen}^4 x + \operatorname{Cos}^4 x = 1 - 2 \operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x$$

Sabemos:  $\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 1$

$$(\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x) = (1)^2$$

$$\operatorname{Sen}^4 x + 2\operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x + \operatorname{Cos}^4 x = 1$$

$$\boxed{\operatorname{Sen}^4 x + \operatorname{Cos}^4 x = 1 - 2\operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x}$$

**Demostrar:**

$$\operatorname{Sen}^6 x + \operatorname{Cos}^6 x = 1 - 3\operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x$$

$$\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x = 1$$

$$(\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x)^3 = (1)^3$$

$$\operatorname{Sen}^6 x + 3\operatorname{Sen}^4 x \operatorname{Cos}^2 x + 3\operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^4 x + \operatorname{Cos}^6 x = 1$$

Ordenando y factorizando

$$\operatorname{Sen}^6 x + \operatorname{Cos}^6 x + 3\operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x \underbrace{(\operatorname{Sen}^2 x + \operatorname{Cos}^2 x)}_1 = 1$$

$$\boxed{\operatorname{Sen}^6 x + \operatorname{Cos}^6 x = 1 - 3\operatorname{Sen}^2 x \operatorname{Cos}^2 x}$$

*Motivación*

## Resolviendo en clase

1 Simplifique:

$$D = (\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctgx}) \operatorname{Senx}$$

*Resolución:*

*Rpta:*

2 Reducir:

$$A = (\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctgx}) \operatorname{Cosx}$$

*Resolución:*

*Rpta:*

3 Reducir:

$$E = (\operatorname{Sen}^2x - \operatorname{Cos}^2x)^2 + 4\operatorname{Sen}^2x \operatorname{Cos}^2x$$

*Resolución:*

*Rpta:*

4 Si:  $\operatorname{Sec}^2x + \operatorname{Csc}^2x = 2$

Calcule:

$$M = \operatorname{Sec}^2x \operatorname{Csc}^2x - 1$$

*Resolución:*

*Rpta:*

5 Si:  $\text{Sen}^2x \text{Cos}^2x = 1/36$

Calcule:

$$M = \text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x$$

*Resolución:*

6 Reducir:

$$A = \text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x + 3\text{Sen}^2x \text{Cos}^2x$$

*Resolución:*

*Rpta:*

*Rpta:*

## Ahora en tu cuaderno

7. Simplifique:

$$B = \text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x + 2\text{Sen}^2x \text{Cos}^2x$$

8. Simplifique:

$$M = \frac{\text{Sen}^4x + \text{Cos}^4x - \text{Sen}^2x \text{Cos}^2x}{\text{Sen}^6x + \text{Cos}^6x}$$

9. Reduce:

$$E = \frac{\text{Tgx} + \text{Ctgx}}{\text{Secx}}$$

10. Simplifique:

$$M = \frac{\text{Sec}^2x + \text{Csc}^2x}{(\text{Tgx} + \text{Ctgx})^2}$$

11. Si:  $\text{Tgx} + \text{Ctgx} = 2$

Calcule:

$$M = \text{Secx} \text{Cscx} - 2$$

12. Si:

$$\text{Sec}^2\theta + \text{Csc}^2\theta = 8$$

Calcule:

$$M = \text{Sec}^2\theta \text{Csc}^2\theta - 5$$

## Para reforzar

1. Simplifique:

$$A = \frac{\operatorname{Sec}x}{\operatorname{Csc}x} + \frac{\operatorname{Csc}x}{\operatorname{Sec}x}$$

- a)  $2\operatorname{Sen}x \operatorname{Cos}x$       b)  $\operatorname{Csc}x$   
 c)  $-\operatorname{Sec}x \operatorname{Csc}x$   
 d)  $\operatorname{Sec}x \operatorname{Csc}x$       e)  $\operatorname{Sec}x$

2. Reduce:

$$B = (\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctg}x) \operatorname{Sec}^{-1}x$$

- a)  $\operatorname{Csc}x$       b)  $\operatorname{Sen}x$  c)  
 $\operatorname{Cos}x$   
 d)  $\operatorname{Sec}x$       e)  $\operatorname{Tgx}$

3. Simplifique:

$$C = (\operatorname{Sec}^2x + \operatorname{Csc}^2x) \operatorname{Cos}^2x$$

- a)  $\operatorname{Sen}^2x$       b)  $\operatorname{Cos}^2x$   
 c)  $\operatorname{Sec}^2x$   
 d)  $\operatorname{Csc}^2x$       e)  $\operatorname{Tg}^2x$

4. Simplifique:

$$D = \operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x + 2\operatorname{Sen}^2x \operatorname{Cos}^2x$$

- a) 1      b) 0  
 c) 2  
 d)  $\operatorname{Sen}^2x \operatorname{Cos}^2x$       e) -1

5. Si:  $\operatorname{Sen}^2x \operatorname{Cos}^2x = 1/9$

Calcule:

$$M = \operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x$$

- a)  $2/81$       b)  $7/9$   
 c)  $5/9$   
 d)  $3/7$       e)  $1/9$

6. Simplifique:

$$E = 2(\operatorname{Sen}^4\theta + \operatorname{Cos}^4\theta) + 4\operatorname{Sen}^2\theta \operatorname{Cos}^2\theta$$

- a) 1      b) 2  
 c) 3  
 d) -1      e) -2

7. Si:  $\operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctg}x = 2$

Calcule:

$$M = \operatorname{Sen}^6x + \operatorname{Cos}^6x$$

- a)  $1/4$       b)  $1/2$   
 c)  $3/4$   
 d) 1      e) 2

8. Simplifique:

$$E = \operatorname{Sen}^6\theta + \operatorname{Cos}^6\theta + 3\operatorname{Sen}^2\theta \operatorname{Cos}^2\theta$$

- a) 1      b) 0  
 c) -1      d)  $\operatorname{Sen}^2\theta \operatorname{Cos}^2\theta$   
 e)  $2\operatorname{Sen}^2\theta \operatorname{Cos}^2\theta$

9. Simplifique:

$$E = (\operatorname{Sec}^2x + \operatorname{Csc}^2x)(\operatorname{Sec}^2x)^{-1}$$

- a)  $\operatorname{Csc}x$       b)  $\operatorname{Csc}^2x$   
 c)  $\operatorname{Sen}^2x$   
 d)  $\operatorname{Cos}^2x$       e)  $\operatorname{Sec}^2x$

10. Simplifique:

$$A = 3(\operatorname{Sen}^6\theta + \operatorname{Cos}^6\theta) + 9\operatorname{Sen}^2\theta \operatorname{Cos}^2\theta$$

- a) 1      b) 2  
 c) 3  
 d) 0      e)  $\operatorname{Sen}^2\theta \operatorname{Cos}^2\theta$

11. Si:  $\operatorname{Sen}x \operatorname{Cos}x = 2$

Calcule:

$$M = \operatorname{Tgx} + \operatorname{Ctg}x$$

- a)  $1/3$       b) 4  
 c)  $1/2$   
 d)  $1/4$       e)  $1/9$

12. Si:  $\operatorname{Sen}^2x \operatorname{Cos}^2x = 2/5$

Calcule:

$$M = \operatorname{Sen}^4x + \operatorname{Cos}^4x$$

- a)  $1/3$       b)  $1/5$   
 c)  $1/2$   
 d)  $1/10$       e)  $1/4$