



Álgebra

FACTORIZACION POR EL METODO DE LAS IDENTIDADES

MÉTODO DE LAS IDENTIDADES

Este método se basa en los productos notables, es decir, si se nos proporciona un polinomio cuya forma conocemos, podemos escribir la multiplicación indicada de factores que le dio origen.

A. DIFERENCIA DE CUADRADOS

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo 1:

Factoriza: $9x^2 - 16$

Resolución:

Extraemos la raíz cuadrada a ambos términos.

$$\begin{aligned}\sqrt{9x^2} &= \sqrt{9} \sqrt{x^2} = 3x \\ \sqrt{16} &= 4\end{aligned}$$

La expresión factorizada será: $9x^2 - 16 = (3x + 4)(3x - 4)$

Ejemplo 2:

Factoriza: $E = 16x^4 - 81$

Resolución:

Escribiendo la diferencia de cuadrados dada como la suma por la diferencia de sus raíces cuadradas.

$$\begin{array}{cc} E = 16x^4 - 81 & \\ \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} & \\ \downarrow \quad \downarrow & \\ 4x^2 & 9 \end{array}$$

El primer factor ($4x^2 + 9$) es primo; pero el segundo factor obtenido ($4x^2 - 9$) no lo es:

$$\begin{aligned} E &= (4x^2 + 9) (4x^2 - 9) \\ &\quad \sqrt{\quad} \quad \sqrt{\quad} \\ &\quad 2x \quad 3 \\ E &= (4x^2 + 9)(2x + 3)(2x - 3) \end{aligned}$$

B. TRINOMIO CUADRADO PERFECTO

Extraemos la raíz cuadrada a ambos términos.

$$\begin{array}{ccc} a^2 \pm 2ab + b^2 & = & (a \pm b)^2 \\ \sqrt{\quad} \quad \pm \quad \sqrt{\quad} & & \\ \uparrow & & \\ \downarrow & & \downarrow \\ a & & b \\ \leftarrow \quad \quad \rightarrow & & \\ & & 2ab \end{array}$$

Ejemplo 1:

Factoriza:

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow M = 4x^2 + 12x + 9 & & \\ \sqrt{\quad} \quad \quad \sqrt{\quad} & & \\ \downarrow \quad \quad \downarrow & & \\ 2x & & 3 \\ \leftarrow \quad \quad \rightarrow & & \\ & & 2(2x)(3) \end{array}$$

El polinomio M (factorizado) se escribe como el cuadrado de la suma de las raíces.

$$M = (2x + 3)^2$$

En el siglo XVII para representar los signos (+) y (-) se usaban las letras P de plus para la suma y M de minus para la resta, respectivamente.

Ejemplo 2: Factoriza:

$$\Rightarrow N = x^2 + 10xy + 25y^2$$

$$N = (x + 5y)^2$$

Cuidado:

La expresión $(2x + 3)^2$ equivale a escribir:
 $(2x + 3)(2x + 3)$

Ejemplo 3: Factoriza:

$$\Rightarrow P = m^{16} - 2m^8t^2 + t^4$$

Si el doble del producto de las raíces de los extremos es negativo, la expresión factorizada es el cuadrado de la diferencia de las raíces.

$$P = (m^8 - t^2)^2$$

C. SUMA Y DIFERENCIA DE CUBOS

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

Ejemplo 1:

Factoriza: $E = a^6 + 125$

Resolución:

* Raíz cúbica del 1.º término

$$\sqrt[3]{a^6} = a^{6/3} = a^2$$

* Raíz cúbica del 2.º término

$$\sqrt[3]{125} = 5$$

* La suma de estas dos raíces cúbicas constituyen el primer factor buscado. $E = a^6 + 125 = (a^2 + 5)(\dots\dots\dots)$

* El factor trinomio se calcula así:

- Los términos extremos son los cuadrados de los términos del factor binomio.

$$E = a^6 + 125 = (a^2 + 5)(a^4 + \dots + 25)$$

- El término central es el producto de los términos del factor binomio con el signo cambiado.

$$E = (a^2 + 5)(a^4 - 5a^2 + 25)$$

Ejemplo 2:

Factoriza: $F = 27x^9 - 8y^6$

Resolución:

* Raíz cúbica del 1.º término.

$$\sqrt[3]{27x^9} = \sqrt[3]{27} \cdot \sqrt[3]{x^9} = 3x^3$$

* Raíz cúbica del 2.º término.

$$\sqrt[3]{8y^6} = \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{y^6} = 2y^2$$

$$E = (3x^3 - 2y^2)(9x^6 + 6x^3y^2 + 4y^4)$$

Ejercicios Resueltos

1. Factoriza:

$$w^5x^3 + w^5y^3 + 3w^5xy(x + y)$$

Resolución:

$$\begin{aligned} &w^5x^3 + w^5y^3 + 3w^5xy(x + y) \\ &= w^5(x^3 + y^3 + 3xy(x + y)) \\ &= w^5(x + y)^3 \end{aligned}$$

2. Factoriza:

$$(x^2 + xy)^2 - (y^2 + xy)^2,$$

y señala el factor primo que menos se repite.

Resolución:

$$\begin{aligned} &(x^2 + xy)^2 - (y^2 + xy)^2 \\ &= (x^2 + xy + y^2 + xy)(x^2 + xy - (y^2 + xy)) \\ &= (x^2 + 2xy + y^2)(x^2 - y^2) \\ &= (x + y)^2(x + y)(x - y) \\ &= (x + y)^3(x - y) \end{aligned}$$

El factor primo que menos se repite es $(x - y)$.

3. Factoriza:

$$x^2 + y^2 - 2xy - z^2$$

y da por respuesta la suma de factores primos.

Resolución:

$$\begin{aligned} &x^2 + y^2 - 2xy - z^2 \\ &= (x^2 - 2xy + y^2) - z^2 \\ &= (x - y)^2 - z^2 \\ &= (x - y + z)(x - y - z) \end{aligned}$$

Luego la suma de factores primos es $(2x + 2y)$.

Resolviendo en clase

1 Factoriza:

$$m^3x^2 + m^3y^2 + 2m^3xy$$

y señala el factor primo que menos se repite.

Resolución:

Rpta:

2 Factoriza:

$$x^5 + x^3y^2 + 2x^4y$$

y señala el factor primo que más se repite.

Resolución:

Rpta:

3 Factoriza:

$$x^4 - 81$$

e indica un factor primo.

Resolución:

Rpta:

4 Factoriza:

$$(w+2)^4x^3 + (w+2)^4y^3 + 3(w+2)^4xy(x+y)$$

y señala la suma de coeficientes de un factor primo.

Resolución:

Rpta:

5 Factoriza:

$$x^2 + y^2 - 2xy - z^2$$

y da por respuesta la suma de factores primos.

Resolución:

6 Factoriza:

$$(x + y)^2 + x^3 + y^3 + 3xy(x + y)$$

e indica la suma de coeficientes de un factor primo.

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Indica un factor primo de:

$$a^2(x^2 - y^2) + b^2(x^2 - y^2) + 2abx^2 - 2aby^2$$

8. Indica el número de factores primos de:

$$mn^4 - 5m^2n^3 - 4m^3n^2 + 20m^4n$$

9. Luego de factorizar :

$$x^6 + x^4c^2 + 2x^5c - x^2c^4 - c^6 - 2xc^5$$

señala el factor primo que más se repite.

10. Después de factorizar, señala el factor común de segundo grado.

$$N = kx^2 - ky^2 + px^2 + py^2$$

11. Indica uno de los factores de:

$$4x^2 + 9y^2 + 24y - 16$$

12. Factoriza y señala el número de factores primos:

$$x^{n+2} + x^n + x^3 + x^2 + x + 1$$

Para reforzar

1. Factoriza:

$$wx^2 + wy^2 - 2 wxy$$

y señala el factor primo que más se repite.

- a) $(x + y)^2$ b) w c) w^2
d) $x + w$ e) $x + y$

2. Factoriza: $x^2 - 25$

e indica un factor primo.

- a) $x + 1$ b) $x + 5$ c) $x + 25$
d) $x - 1$ e) $x - 25$

3. Factoriza:

$$w^5x^3 + w^5y^3 + 3w^5xy(x + y)$$

y da por respuesta la suma de coeficientes de un factor primo.

- a) 3 b) 4 c) 2
d) 1 e) -1

4. Factoriza:

$$(2w - 1)^2x^3 - (2w - 1)^2y^3 - 3(2w - 1)^2xy(x - y)$$

e indica la suma de coeficientes de un factor primo.

- a) 1 b) 2 c) -1
d) Más de una es correcta e) 0

5. Factoriza:

$$(x^2 + xy)^2 - (y^2 + xy)^2$$

y señala el factor primo que menos se repite.

- a) $(x + y)^2$ b) $(x + y)^3$ c) $x + y$
d) $(x - y)^2$ e) $x - y$

6. Factoriza:

$$z^2 - x^2 - y^2 - 2xy$$

y da por respuesta la suma de factores primos.

- a) $2z + 2x$ b) $2z$ c) $x - y$
d) $2z - 2y$ e) $z - x$

7. Factoriza:

$$a^2m + a^2n - b^2m - b^2n$$

e indica el número de factores primos.

- a) 5 b) 1 c) 4
d) 3 e) 2

8. Luego de factorizar :

$$a^5 - a^2b^3 - 3a^3b(a - b) - a^3b^4 + b^7 + 3ab^5(a - b)$$

señala un factor primo.

- a) $a + b$ b) $a^2 - b$ c) $c + b$
d) $a - b^2$ e) $a^2 + b$

9. Señala un factor primo de:

$$P = ax + bx - ay - by$$

- a) $a - b$ b) 1 c) $x + y$
d) 2 e) $a + b$

10. Señala un factor primo de:

$$(x + 1)(y - 2) + 3x(x + 1)$$

- a) $(x + 1)$ b) $(y + 2)$ c) $(x - 1)$
d) 1 e) $(y - 2)$

11. Señala un factor de:

$$nx + ny + x + y$$

- a) $(n - 1)$ b) $(x - y)$ c) $(x + y)$
d) x e) y

12. Factoriza:

$$N = 36x^4 - 16y^6$$

y halla la suma de sus factores primos.

- a) $10x^2$ b) $12x^2$ c) $6x^2$
d) $8y^3$ e) $12y^3$