FACTORIZACION POR ASPA SIMPLE Y DIVISORES BINOMICOS

Aspa simple

Aplicable a polinomios de la forma:

$$P_{(x;y)} = ax^{2m}+bx^{m}y^{n}+cy^{2n} \qquad (m;n \in \mathbb{Z}^{+})$$

Caso particular: Para trinomios de una sola variable.

$$\boxed{P_{(x)} = ax^{2n}+bx^{n}+c}$$

Ejemplos:

1. Factoriza:
   $P(x,y) = 10x^2 - 7xy - 12y^2$

   ✦ Se descomponen los términos extremos, tal que la suma de los productos cruzados dé el término central:

$$P(x,y) = 10x^2 - 7xy - 12y^2$$

$$\begin{array}{lcl} 5x & +4y & \rightarrow +8xy \\ 2x & -3y & \rightarrow \underline{-15xy} \\ & & -7xy \end{array}$$

✦ Los factores se generan en forma horizontal:
$P(x,y) = (5x+4y)(2x-3y)$

2. Factoriza:
   $P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 3$

✦ Se descomponen los términos extremos:

$$P(x) = 2x^4 - 5x^2 + 3$$

$$\begin{array}{lcl} 2x^2 & -3 & \rightarrow -3x^2 \\ x^2 & -1 & \rightarrow \underline{-2x^2} \\ & & -5x^2 \end{array}$$

✦ Generamos los factores así:
$P(x;y) = (2x^2-3)(x^2-1)$

✦ El 2do factor aún es factorizable:
$P(x) = (2x^2-3)(x+1)(x-1)$

Divisores Binómicos

Se utiliza para factorizar polinomios de grado mayor o igual a 3.

Ejemplo:

Factoriza:
$$P(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$$

1) Determina los posibles valores que anulan al polinomio.

   a) Si el polinomio es mónico se trabaja con:
   $\pm$ (divisores del término independiente)

   b) Si el polinomio no es mónico se trabaja con:
   $\pm\left(\dfrac{\text{Divisores del Término Independiente}}{\text{Divisores Coeficiente Principal}}\right)$

Ejemplo:

$+1; -1; +2; -2$

2) En base a estos valores se realiza evaluaciones en el polinomio, hasta conseguir el valor que logre anularlo; este valor genera un factor de 1.^{er} grado.

Ejemplo:

$P(1) = 1^3 + 2(1)^2 - 1 - 2 = 0$
como $x=1 \Rightarrow$ factor: $(x-1)$

3) Para conseguir otro factor se repite el proceso las veces que sea necesario.

Ejemplo:

$P(-1) = (-1)^3+2(-1)^2-(-1)-2 = 0$
$P(-2) = (-2)^3+2(-2)^2-(-2)-2 = 0$
$\Rightarrow P(x) = (x+1)(x-1)(x+2)$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Factoriza:

$$P(x) = (x^2+3x)^2+6x(x+3)+8$$

Resolución:

Introduciendo el factor "x" en el segundo paréntesis se tiene: $P(x) = (x^2+3x)^2+6(x^2+3x)+8$

Aplicando "aspa simple":

$$P(x) = (x^2+3x)^2+6(x^2+3x)+8$$

$$\begin{array}{lcr} (x^2+3x) & & 4 \\ (x^2+3x) & & 2 \end{array}$$

$$P(x) = (x^2+3x+4)(x^2+3x+2)$$

Aplicando "aspa simple" en el segundo paréntesis:

$$P(x) = (x^2+3x+4)\ (x^2+3x+2)$$

$$\begin{array}{lcr} x & & 2 \\ x & & 1 \end{array}$$

$$P_{(x)} = (x^2+3x+4)(x+2)(x+1)$$

2. Factoriza: $P_{(x;y)}=x^2(x+y)^2 - 8xy^2(x+y)+12y^4$

Resolución:

Aplicando convenientemente leyes de exponentes y la ley distributiva:

$P_{(x;y)}=(x^2+xy)^2- 8(x^2+xy)y^2+12y^4$

Por "aspa simple", obtenemos:

$$P_{(x;y)} =(x^2+xy)^2- 8(x^2+xy)y^2+12y^4$$

$$\begin{array}{lcr} (x^2+xy) & & \\ - & 2y^2 & (x^2+xy) \\ - 6y^2 & & \end{array}$$

$$P_{(x;y)}=(x^2+xy- 2y^2)(x^2+xy- 6y^2)$$

Aplicando "aspa simple" en cada paréntesis:

$$P_{(x;y)}=(x^2+xy- 2y^2)(x^2+xy- 6y^2)$$

$$\begin{array}{lclclcl} x & & +2y & & x & & +3y \\ x & & -y & & x & & -2y \end{array}$$

$$P_{(x;y)}=(x+2y)(x- y)(x+3y)(x- 2y)$$

3. Factoriza:

$$P_{(x)}= (x+3)^4- 7(x+3)^2+6$$

Resolución:

Aplicando "aspa simple", tenemos:

$$P_{(x)}= (x+3)^4 - 7(x+3)^2+6$$

$$\begin{array}{lcr} (x+3)^2 & & -6 \\ (x+3)^2 & & -1 \end{array}$$

$$P_{(x;y)}=[(x+3) - 6][(x+3) - 1]$$

2 2

Aplicando "diferencia de cuadrados" en el segundo corchete:

$$P_{(x)}=(x^2+6x+9-6)(x+3+1)(x+3-1)P_{(x)}=(x^2+6x+3)(x+4)(x+2)$$

4. Factoriza:

$$P(x,y)= x^3 + 2x^2 - 5x - 6$$

Resolución:

Determinemos los posibles ceros del polinomio:

$x = \pm 1, 2, 3, 6$

Si $x = -1 \Rightarrow P(-1) = 0$

De donde, $(x + 1)$ es divisor de $P(x)$.

Dividendo por el método de Ruffini

$$\frac{x^3 + 2x^2 - 5x - 6}{x + 1}$$

$$R = 0$$

Esquema:

$$\begin{array}{r|rrr:r} & 1 & 2 & -5 & -6 \\ -1 & & -1 & -1 & 6 \\ \hline & 1 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$P(x) = (x + 1)(x^2 + x - 6)$$

$$P(x) = (x + 1)(x + 3)(x - 2)$$

5. Factoriza:

$P(x,y)= 12x^3 + 16x^2 + 7x + 1$

Resolución:

Determinemos los posibles ceros del polinomio:

$x = \pm\ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{12}$

Si $x = -\frac{1}{2} \Rightarrow P(-\frac{1}{2}) = 0$

de donde $(x + \frac{1}{2})$ es divisor de $P(x)$.

Dividimos:

Por Ruffini:

$$\frac{12x^3 + 16x^2 + 7x + 1}{x + \frac{1}{2}}$$

$$\begin{array}{c|ccc:c} & 12 & 16 & 7 & 1 \\ -\frac{1}{2} & & -6 & -5 & -1 \\ \hline & 12 & 10 & 2 & 0 \end{array}$$

$P(x)=(x + \frac{1}{2})(12x^2+10x+2)$

$P(x)=\frac{(2x+1)}{2}2(6x^2+5x+1)$

$P(x)=(2x+1)(2x+1)(3x+1)$

$P(x) = (2x+1)^2(3x+1)$

Resolviendo en clase

1 Luego de factorizar, señala el factor primo de mayor suma de coeficientes.

$$P(x)=12x^2 - 29x+15$$

Resolución:

Rpta:

2 Halla la suma de los factores primos de:

$$x^4 - 26x^2+25$$

Resolución:

Rpta:

3 Factoriza:

$$M(x) = (x - 1)^4+(x - 1)^2- 6$$

e indica la suma de coeficientes de un factor primo.

Resolución:

Rpta:

4 Halla un factor lineal de:

$$x^6 + 28x^3 + 27$$

Resolución:

Rpta:

5 **Calcular el número de las facturas primas lineales de:**

$$P(x) = x^4 - 6x^3 + 19x^2 - 38x + 24$$

Resolución:

Rpta:

6 **Factoriza:**

$$a^2x^2 + (a^3 + a^2b + 1)x + a + b$$

e indica un factor primo.

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Factoriza:

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$

e indica la suma de factores primos.

8. Dado el siguiente polinomio:

$$x^2 + (2a + 7)x + a^2 + 7a + 10$$

señala uno de los factores.

9. Factoriza:

$$x^8 + x^4 + 1$$

e indica un factor primo.

10. ¿Cuántos factores primos se obtiene al factorizar P(x)?

$$P(x) = x^8 + x^4 - 2$$

11. Factoriza:

$$P(x) = 6x^{2n+1} + 5x^{n+1} - 6x$$

e indica un factor primo.

12. Factoriza:

$$M(x) = x(x + 2)(x - 1) + 4(x^2 - 6)$$

e indica un factor primo.

Para reforzar

1. Factoriza:

$$x^3 - 8x^2 + 13x - 6$$

e indica un factor primo

a) $x + 6$ b) $x - 6$ c) $x - 3$
d) $x + 5$ e) $x - 10$

2. Factoriza:

$$P(x;y)=(x - y)^3-(x - y)^2-2(x - y)$$

e indica un factor primo.

a) $x-y+3$ b) $x-y+2$ c) $x-y+1$
d) $x-y-8$ e) x

3. Factoriza:

$$P(x) = (x+1)^4 - 5(x+1)^2+4$$

e indica un factor primo.

a) x b) $x + 7$ c) $x + 8$
d) $x + 9$ e) $x + 12$

4. Factoriza:

$$x^3+6x + 14x+15$$

e indica un factor primo.

a) $x + 2$ b) $x - 21$ c) $3 - x$
d) $x + 3$ e) $x - 3$

5. Factoriza y señala un factor primo de:

$$F(x) = x^3- 4x^2 - 13x - 8$$

a) $x + 1$ b) $x + 2$ c) $x + 3$
d) $x + 4$ e) $x + 5$

6. Factoriza:

$$2x^3+ x^2+x -1$$

e indica el factor lineal.

a) $x-1/2$ b) $2x+1$ c) $x+1/2$
d) $2x - 1$ e) $x+2$

7. Factoriza:

$$P(x,y)=25x^4 - 109x^2y^2 +36y^4,$$

indicando la suma de sus factores primos.

a) $10x$ b) $12x+10y$ c) $12x$
d) $10y$ e) $5x-3y$

8. Factoriza:

$$mnx^2 + (m^2 + n^2)x + mn$$

y halla un factor primo.

a) $mx + m$ b) $x + 1$ c) $nx + n$
d) $mx+n$ e) $x+2$

9. Factoriza:

$$3(x^2 + 2xy + y^2) - 4x - 4y + 1$$

e indica un factor primo.

a) $3x+3y+1$ b) $x + y + 1$ c) $x + y - 1$
d) $3x + 3y$ e) $x + y$

10. Factoriza:

$$P(x)= x^4+2x^3 - 2x^2 + x + 6$$

y señala la suma de los factores primos lineales.

a) $2x - 1$ b) $2x+1$ c) $3x - 2$
d) $3x + 2$ e) $4x+3$

11. Señala la suma de los factores primos de:

$$M(a;b;c)= a^4- 2(b^2+c^2)a^2+(b^2 - c^2)^2$$

a) $2a$ b) $4a$ c) $2b$
d) $3c$ e) $5b$

12. Hallar un factor primo de:

$$x^4 + 7x^3 + 9x^2 - 7x - 10$$

a) $x - 1$ b) $x- 5$ c) $x + 5$ d) $x - 2$
e) x^2+x+5