Triángulo Educativo

Geometría

5° SECUNDARIA

RELACIONES METRICAS EN LA CIRCUNFERENCIA

TEOREMA DE LAS CUERDAS

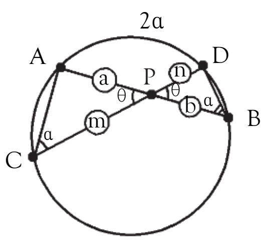
Si en una circunferencia se trazan dos cuerdas que se intersectan en un punto P, entonces los productos de los segmentos logrados en cada cuerda son iguales.

A D

C P B

$\boxed{AP \cdot PB = CP \cdot PD}$

Demostración:

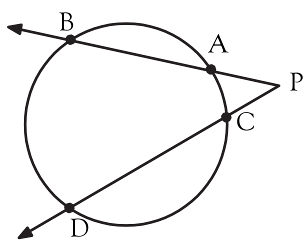


* $\Delta APC \sim \Delta PDB$

$\dfrac{a}{n} = \dfrac{m}{b}$ $\boxed{a \cdot b = m \cdot n}$

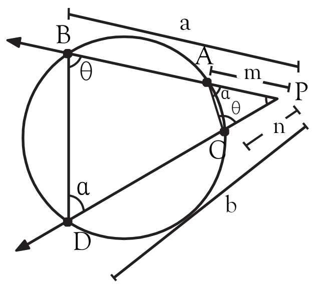
TEOREMA DE LAS SECANTES

Si desde un punto exterior a una circunferencia se trazan dos secantes, entonces los productos de una de ellas y su parte externa son iguales.



$\boxed{PB \cdot PA = PD \cdot PC}$

Demostración:



* ⏢ DBAC es inscrito:
 m ∠ BDC = m ∠ CAP
 m ∠ DBA = m ∠ ACP

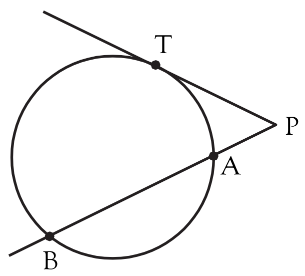
* $\Delta APC \sim \Delta BPD$

$\dfrac{n}{a} = \dfrac{m}{b}$

$\boxed{b \cdot n = a \cdot m}$

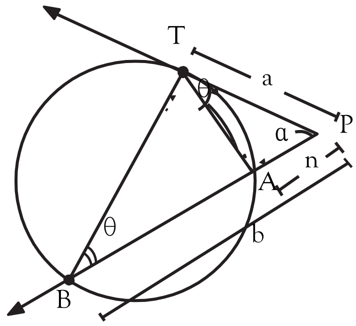
TEOREMA DE LA TANGENTE Y SECANTE

Si desde un punto exterior a una circunferencia se traza una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.



$\boxed{PT^2 = PB \cdot PA}$

Demostración:



* $\Delta TPA \sim \Delta BTP$

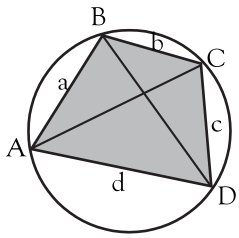
$$\frac{a}{b} = \frac{n}{a}$$

$$\boxed{a^2 = b.n}$$

TEOREMA DE PTOLOMEO

En todo cuadrilátero inscrito o inscriptible, el producto de las diagonales es igual a la suma de productos de los lados opuestos.

Si ABCD es inscrito o inscriptible,



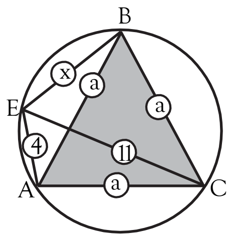
se cumple:

$$\boxed{AC \,.\, BD = a.c + b.d}$$

Ejemplo:

Teorema de Chadú

Sobre el arco $\overset{\frown}{AB}$ de una circunferencia circunscrita al triángulo equilátero ABC, se toma el punto E, tal que:



Halla x.

Resolución:

En el ⏢ AEBC

Por Ptolomeo:

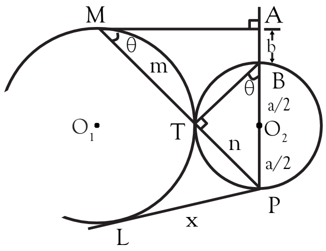
$$a(11) = ax + a(4)$$
$$7\cancel{a} = \cancel{a}x$$
$$7cm = x$$

$$\boxed{AE+EB=EC}$$

Por Chadú:

1) Desde un punto exterior a dos circunferencias tangentes exteriores en T de centros O_1 y O_2 se trazan una tangente AM y la secante ABP, respectivamente, de modo que $O_2 \subset \overline{BP}$ y $m\measuredangle \overline{PAM}=90°$. Si $\overline{BP}=a$, $\overline{AB}=b$ y $T \subset MP$, halla la longitud de la tangente trazada desde P a la circunferencia de centro O_1.

Resolución:



Por el Teorema de la tangente:

$x^2=n(m+n)$ ....(1)

◺MAP ~ ◺BTP

$$\Rightarrow \frac{m+n}{a} = \frac{a+b}{n}$$

$n(m+n)=a(a+b)$ ....(2)

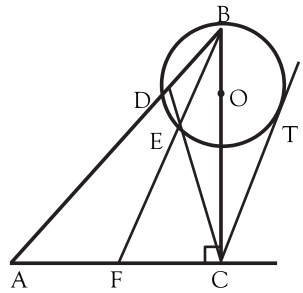
De (1) y (2):

$x^2=a(a+b)$

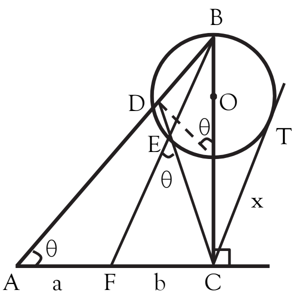
$\Rightarrow x=\sqrt{a(a+b)}$

Rpta.: $\sqrt{a(a+b)}$

2) En la figura, "O" es el centro de la circunferencia.
T: punto de tangencia.
$\overline{BC} \perp \overline{AC}$; AF=a y FC=b
Halla CT.



Resolución:



Por el Teorema de la tangente:

$x^2=CD.CE$ ....(1)

$\Delta ADC \sim \Delta EFC \Rightarrow \frac{CD}{b} = \frac{a+b}{CE}$

$CD.CE=b(a+b)$.............................(2)

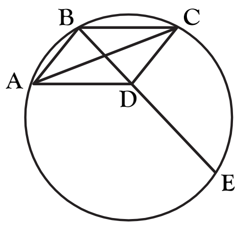
De (1) y (2):

$x^2=b(a+b) \Rightarrow x=\sqrt{b(a+b)}$

Rpta.: $\sqrt{b(a+b)}$

Resolviendo en clase

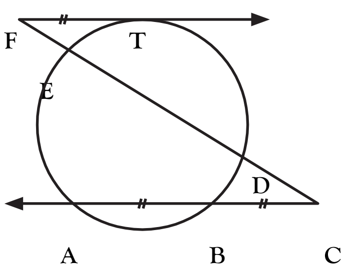
1 ABCD es un paralelogramo donde:
AC= 2BD=8. Calcula "DE".



***Resolución*:**

Rpta:

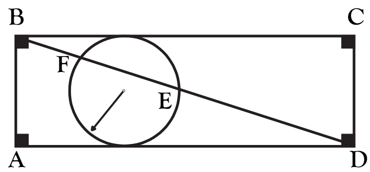
2 En la figura, EF=3 y ED=7. Calcula "CD" si FT=AB=BC.



Resolución:

Rpta:

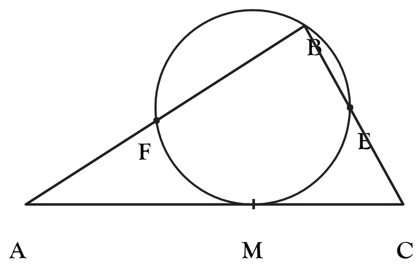
3 Halla BC si BF=3, EF=9 y ED=16.



***Resolución*:**

Rpta:

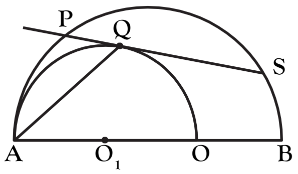
4 En el gráfico, M es punto medio de AC y además es punto de tangencia. Halla AF si
además AB=18 cm, BE= 7 cm y EC=9cm.



Resolución:

Rpta:

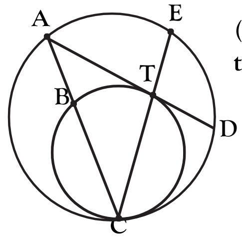
5 **Siendo O y O_1 centros, PQ=4u y QS=9u, halla AQ. (A y Q: puntos de tangencia)**



***Resolución*:**

Rpta:

6 **Si AB=8u, BC=10u y además CT=TE=6u, halla TD.**



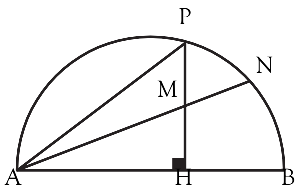
(T y C: Puntos de tangencia)

***Resolución*:**

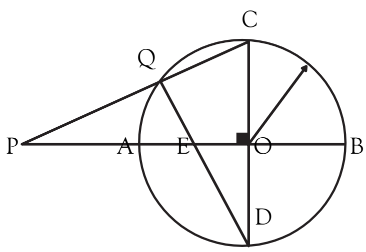
Rpta:

Ahora en tu cuaderno

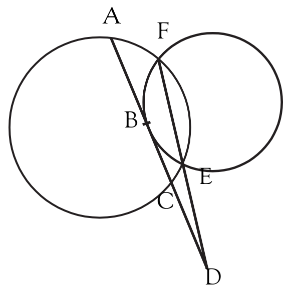
7. En la figura, AP=8 y AM=6. Halla $\overline{MN}$, sabiendo que AB es diámetro de la semicircunferencia.



8. En la figura, halla PA sabiendo que los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son perpendiculares. Además AE=3 y EO=2.

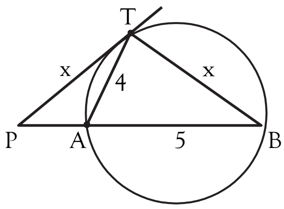


9. Halla BC si AB=3 y CD=4.



10. En un triángulo ABC se traza la mediana BM y la bisectriz BF, además la circunferencia circuns- crita al triángulo FBM interseca a AB y BC en los puntos "P" y "Q", respectivamente, tal que AP=3. Calcula CQ.

11. En la figura, calcula "x" (T: punto de tangencia).

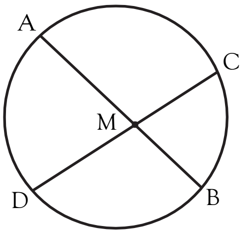


12. Calcula el perímetro de un heptágono regular ABCDEFG, sabiendo que:

$$\frac{1}{AC}+\frac{1}{AE}=\frac{1}{4}$$

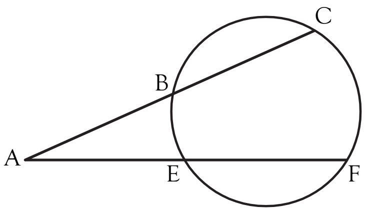
Para reforzar

1. En la figura, AM=12; MB=4 y MC=3. Calcula "DM".



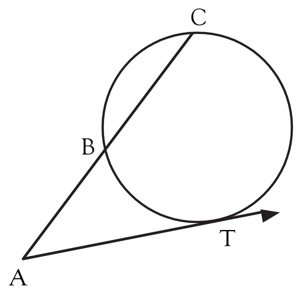
a) 16 b) 18 c) 20
d) 27 e) 30

2. En la figura: AB= 8; BC=10 y AF=16. Calcula el valor de "AE".



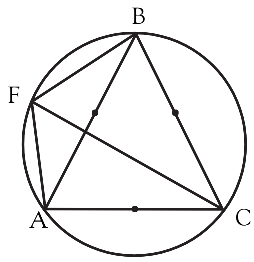
a) 6 b) 8 c) 9
d) 12 e) 10

3. Calcula "AT" si AB=4 y BC=12.



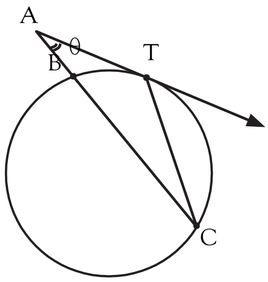
a) 8 b) 9 c) 10
d) 6 e) 12

4. En la figura, ABC es un triángulo equilátero. Si FA=4 y FB=9, calcula "FC".



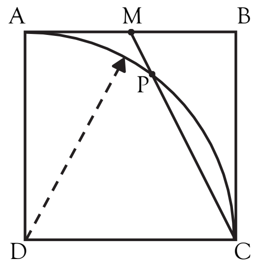
a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

5. Si T es punto de tangencia, AB=4 u, TC= 6u y mBT=2θ , halla $\overset{\frown}{BC}$.



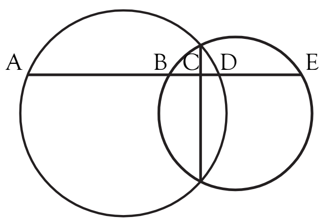
a) 6 u b) 7 u c) 5 u
d) 8 u e) 4 u

6. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado 2 cm. Si AM=MB, calcula PM.



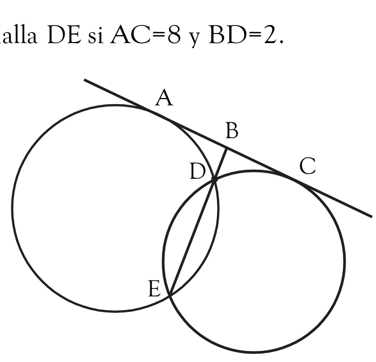
a) $\sqrt{5}/5$ cm b) $\sqrt{5}/2$ cm c) $\sqrt{5}/4$ cm
d) $\sqrt{5}/7$ cm e) $\sqrt{5}/3$ cm

7. Halla DE si AB=5, BC=2 y CD=1.



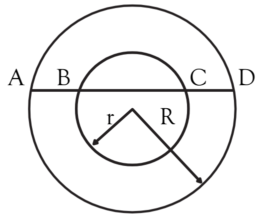
a) 1 b) 1,5 c) 2
d) 2,5 e) 3

8. Halla DE si AC=8 y BD=2.



a) 6 b) 3 c) 5
d) 4 e) 8

9. En la figura, AB=BC=CD. Halla AD si R=9 y r=7.

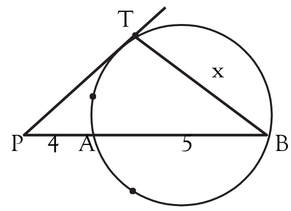


a) 4 b) 8 c) 12
d) 9 e) 15

10. Desde un punto "F" exterior a una circunferencia se trazan las tangentes $\overline{FA}$, $\overline{FB}$ y la secante FCD que interseca a $\overline{AB}$ en el punto "G". Si GC=2 y FC=3, halla "GD".

a) 8 b) 12 c) 10
d) 6 e) 14

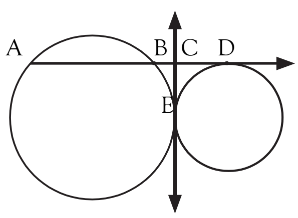
11. En la figura, calcula "x" si T es punto de tangencia y $\overset{\frown}{AT}=\overset{\frown}{AB}$.



a) 8 b) 6 c) 5
d) 7 e) 7,5

12. Siendo "E" y "D" puntos de tangencia. Halla "CD" si:

$$\frac{1}{AD}+\frac{1}{BD}=\frac{1}{5}$$



a) 2,5 b) 7,5 c) 5
d) 10 e) 12,5