



Álgebra

MATRICES II

MULTIPLICACIÓN DE MATRICES

1. MULTIPLICACIÓN DE UN ESCALAR POR UNA MATRIZ

Definamos el producto de multiplicar un escalar (cualquiera) por una matriz de un cierto orden, como aquella matriz del mismo orden cuyos elementos se encuentran multiplicando por ese escalar. Sea:

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow kA = (ka_{ij})_{m \times n} / k \in \mathbb{R}$$

Ejemplo:

$$\begin{aligned} \text{Sea } A &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow (-6)A &= \begin{pmatrix} -6(1) & -6(3) \\ -6(0) & -6(-2) \\ -6(4) & -6(2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -6 & -18 \\ 0 & 12 \\ -24 & -12 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

2. MULTIPLICACIÓN DE DOS MATRICES

Definimos el producto de multiplicar la matriz $A = (a_{ij})_{m \times r}$ por la matriz $B = (b_{jk})_{r \times n}$ (en ese orden), a la matriz denotada por $AB = C = (c_{ik})_{m \times n}$. Donde el elemento c_{ik} se calcula multiplicando la i -ésima fila de A por la k -ésima columna de B .

Es decir: $AB = C = (c_{ik})_{m \times n} / c_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} \cdot b_{jk}$

Ejemplo:

$$\text{Sean } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}_{2 \times 2};$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

$$\Rightarrow C = AB = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{pmatrix}$$

POTENCIACIÓN DE MATRICES

DEFINICIONES

* Dado una matriz cuadrada A y $n \in \mathbb{N} / n \geq 2$; definimos:

$$A^n = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{"n veces"}}$$

* $A^1 = A \quad \forall$ matriz A

Sean A y B matrices del mismo orden.

* Si $AB = BA$ se dice que A y B son conmutativas.

* Si $AB = -BA$ entonces A y B son anticonmutativas.

$$c_{11} = 2(-1) + (-3)(5) = -17$$

$$c_{12} = 2(0) + (-3)(-2) = 6$$

$$c_{13} = 2(1) + (-3)(3) = -7$$

$$c_{21} = 6(-1) + 4(5) = 14$$

$$c_{22} = 6(0) + 4(-2) = -8$$

$$c_{23} = 6(1) + 4(3) = 18$$

$$\neq C = \begin{pmatrix} -17 & 6 & -7 \\ 14 & -8 & 18 \end{pmatrix}$$

PROPIEDADES

Sean A , B y C matrices del mismo orden y $\{\lambda; \delta\}$ escalares para los cuales están definidas las operaciones de multiplicación con una matriz.

Entonces se verifican:

$$\begin{aligned} \text{I. } A + B &= B + A \\ (A + B) + C &= A + (B + C) \\ \lambda(A + B) &= \lambda A + \lambda B \\ (\lambda + \delta)A &= \lambda A + \delta A \\ -A &= (-1)A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{II. } A(BC) &= (AB)C \\ (A + B)C &= AC + BC \\ A(B + C) &= AB + AC \\ AB = 0 &\text{ no implica que } A = 0 \vee B = 0 \\ AB = AC &\text{ no implica que } B = C \end{aligned}$$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ halla $\text{traza}(AB)$.

Resolución:

Como A y B son conformes a la multiplicación, sea:
 $C = AB = [a_i b_j]_{3 \times 3}$ donde a_i es la i-ésima fila de A y b_j es la j-ésima columna de B.

Entonces:

$$\text{traza}(AB) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\text{traza}(AB) = (8 - 2) + (-8 - 2) + (0 + 3) = -1$$

$$\therefore \text{traza}(AB) = -1$$

2. Siendo $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, calcula AB y BA .

Resolución:

$$\begin{aligned} * \quad AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0 \text{ (Matriz nula)} \end{aligned}$$

Nótese que $AB=0$ no implica que necesariamente $A=0$ ó $B=0$.

$$\begin{aligned} * \quad BA &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 11 & 6 & -1 \\ -22 & 12 & -2 \\ -11 & 6 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

De donde $AB \neq BA$, en forma general.

3. Demuestra que las matrices $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$ son permutables; $\forall a; b; c$ y d .

Resolución:

$$\text{Siendo } P = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ y } Q = \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix}$$

deseamos demostrar que $PQ = QP$

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc \\ bc+ad & bd+ac \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ac+bd & bc+ad \\ ad+bc & bd+ac \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Luego $PQ = QP \rightarrow P$ y Q son conmutables o permutables,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} c & d \\ d & c \end{pmatrix} \text{ son conmutables o permutables.}$$

4. Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

calcula $(A + B)^2$ y $A^2 + B^2$.

Resolución:

Calculemos previamente A^2 y B^2 .

$$\begin{aligned} A^2 &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 5 \\ 1 & -3 & -4 \end{pmatrix} \\ &= A \rightarrow A^2 = A \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & -5 \\ -1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \\ &= B \rightarrow B^2 = B \end{aligned}$$

Además, observa que $A + B = I$.

$$\begin{aligned} \text{Luego } (A + B)^2 &= I^2 = I \\ A^2 + B^2 &= A + B = I \end{aligned}$$

Resolviendo en clase

1 Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Halla "X", si: $2(X - 3A) = (B - C) + 4(X - A - B)$

Resolución:

3 Si: $A = (a_{ij})_{4 \times 3} / a_{ij} = \begin{cases} 2 & ; i = j \\ -1 & ; i \neq j \end{cases}$

Calcula la suma de los elementos de "A".

Resolución:

Rpta:

2 Sea la matriz $A = (a_{ij})_{2 \times 2}$ definida de la siguiente forma:

$$a_{ij} = \begin{cases} i - j & ; i < j \\ ij & ; i = j \\ i + j & ; i > j \end{cases}$$

Halla la traza de "A".

Resolución:

Rpta:

Rpta:

4 Escribe explícitamente la matriz:

$$A = (a_{ij})_{2 \times 3} / a_{ij} = \begin{cases} 3^i - j & ; i \geq j \\ i - j & ; i < j \end{cases}$$

Resolución:

Rpta:

5 Sea: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

y $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$;

Halla (ABC)

Resolución:

6 Sea $P(x) = x^2 + 2x + 1$
Halla $P(A)$ si: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Sea $P(x) = x^2 + 3$, halla $P(A)$

Si:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

9. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

y $C = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$;

donde $A^3 + B^3 = C$, halla $a + b + c + d$

8. Dado $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

y $P(x) = x^2 + 2x + 1$, halla: $P(A) + A^2$

10. Dado $P(x) = x^2 - 6x + 7$, halla "n" sabiendo que
 $P(A) = nI$, donde:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Calcula la traza de (A · B) si:

$$A = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} q & \cos q \\ -\cos q & \operatorname{sen} q \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \operatorname{sen} q & -\cos q \\ \cos q & \operatorname{sen} q \end{pmatrix}$$

12. Halla la matriz "X" que resuelve:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 11 & 4 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$$

Da como respuesta la suma de sus elementos.

Para reforzar

1. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Halla f(A) sabiendo que $f(x) = x^3 - x^2 + x + 3$.

a) $\begin{pmatrix} 11 & -14 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 10 & -14 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 5 & -7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} -11 & -14 \\ -6 & -7 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

2. Dada la matriz "A", calcula $A^3 - 6A$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a) A b) 2A c) 2I

d) 3I e) 4I

3. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

y $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

Halla ABC.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 8 & 6 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 18 & 6 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$

4. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$;

Halla $xy + zw$ si $A^3 + B^3 = C$.

a) 0 b) 1 c) 2

d) 3 e) 4

5. Dadas las matrices:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

entonces puedes afirmar que $(C^8 \cdot D^9)$ es:

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 8 & 73 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 71 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 72 & 8 \\ 9 & 1 \end{pmatrix}$
 e) $\begin{pmatrix} 73 & 9 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 71 & 9 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}$

6. Si:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$$

Halla la suma de los elementos de la matriz A^{15} .

- a) $9^{15} + 8^{15}$ b) $2 \cdot 9^{15}$ c) $9^{15} - 8^{15}$
 d) $2 \cdot 8^{15}$ e) 0

7. Si: $A^2 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$,

$$AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix};$$

Calcula $(A - B)^2$.

- a) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

8. Dada la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

y la función $f(x) = x^2 - x - 1$, halla $\text{traz}(f(A))$.

- a) 5 b) 7 c) 10
 d) 14 e) 17

9. Calcula $a + b + c + d$ si:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 5 & 13 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad , \quad AB = C$$

- a) 5 b) 10 c) 15
 d) 20 e) 25

10. Calcula la matriz "X", tal que $A^{31} + XB^{32} = XA^{33}$; donde:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 e) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

11. Si $X + Y = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$,

$$X - Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \text{ halla } X^T.$$

- a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}$
 c) $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$
 d) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

12. Se tiene la matriz $M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$;

entonces el valor de M^{1003} es:

- a) $a^{1003} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ b) $a^{1003} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
 c) $a^{1003} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
 d) $a^{1003} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 1e) $a^{1003} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$