

Aritmética

MAGNITUDES PROPORCIONALES

INTRODUCCIÓN

Todos alguna vez empleamos un razonamiento inductivo que viene asociado a experiencias vividas, por ejemplo decimos: Mientras más alto es un árbol, su sombra será también mayor; si un automóvil lleva una mayor velocidad podrá recorrer mayor distancia en un mismo tiempo o mientras más obreros trabajan en la construcción de una casa se demorarán menos tiempo en terminarla.

Todos los ejemplos nos hablan de cambios o variaciones de las magnitudes (altura, velocidad, distancia, número de personas, días, etc.) que intervienen en una situación. En los dos primeros ejemplos el aumento de una magnitud provocaba el aumento de la otra y en el tercer ejemplo el aumento de una de ellas provocaba la disminución de la otra, cuando ocurren estas situaciones nos encontramos con magnitudes proporcionales.

MAGNITUD

Es todo aquello que experimenta cambios y puede ser medido. Ejemplo: La sombra de un árbol, la velocidad de un auto, los días trabajados, etc.

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Se dice que dos magnitudes son proporcionales cuando al variar una de ellas la otra también varía.

CLASES DE MAGNITUDES:

A. Magnitudes directamente proporcionales (D.P.)

Ejemplo:

Un alumno llega a una librería pensando comprar seis cuadernos pero consultó por varias opciones y obtuvo los siguientes resultados:

	$\div 2$	$\times 3$		
N° Cuadernos	3	6	18	9 12
Costo (s/.)	12	24	72	36 48
	$\div 2$	$\times 3$		

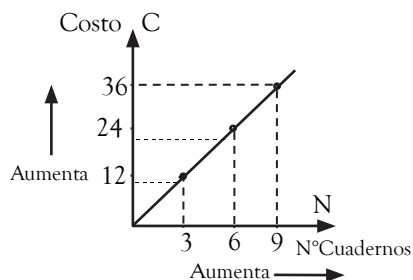
Podemos observar:

- Si se triplica el n°. de cuadernos ($6 \times 3 = 18$) se triplica el costo ($24 \times 3 = 72$).
- Si se reduce a la mitad el número de cuadernos ($6 \div 2 = 3$) el costo también se reduce a la mitad ($24 \div 2 = 12$).
- Si dividimos el n°. de cuadernos entre el costo se obtiene una cantidad constante.

$$\frac{\text{N° cuadernos}}{\text{costo}} = \frac{N}{C} = \frac{3}{12} = \frac{6}{24} = \frac{9}{36} = \frac{12}{48} = \frac{1}{4}$$

constante ←

Graficando y uniendo puntos:



Obtenemos una recta. La gráfica nos indica que si el **número de cuadernos** aumenta, también el **costo** aumenta, y si el número de cuadernos disminuye, el costo disminuye. Podemos concluir que el costo y número de cuadernos son magnitudes directamente proporcionales.

Definición:

Dos magnitudes son directamente proporcionales (D.P.) si al aumentar o disminuir una de ellas, el valor de la otra también aumenta o disminuye en la misma proporción. También se cumple que el cociente entre sus valores correspondientes es una cantidad constante.

Es decir, dadas las magnitudes "A" y "B".

$$A \text{ D.P. } B \rightarrow \frac{A}{B} = \text{constante}$$

B. Magnitudes inversamente proporcionales (I.P.)

Ejemplo:

Un capataz contrata 15 obreros que puede construir un muro en 10 días. Luego de algunos razonamientos elabora la siguiente tabla:

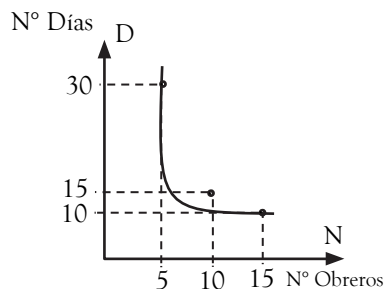
	$\div 3$	$\times 2$	
N° Obreros	5	15	30
N° Días	30	10	5
	$\times 3$	$\div 2$	

Podemos observar:

- Si duplica el n° de obreros ($15 \times 2 = 30$), el número de días se reduce a la mitad ($10 \div 2 = 5$).
- Si se reduce a la tercera parte el número de obreros ($15 \div 3 = 5$), el número de días se triplica ($10 \times 3 = 30$).
- El producto del número de obreros y número de días es constante.

$$\begin{aligned} \text{N° Obreros} \times \text{N° Días} &= 5 \times 30 = 15 \times 10 = \\ &= 30 \times 5 = 150 \\ &\rightarrow \text{constante} \end{aligned}$$

Graficando y uniendo los puntos:



Se forma una curva denominada hipérbola equilátera. Según la gráfica podemos ver que si el número de obreros aumenta, el número de días disminuye, podemos concluir que el número de obreros y el número de días son magnitudes inversamente proporcionales.

Definición:

Dos magnitudes son inversamente proporcionales (I.P.) si al aumentar o disminuir una de ellas, la otra disminuye en el primer caso o aumenta en el segundo caso en la misma proporción. También se cumple que el producto entre sus valores correspondientes es una cantidad constante.

Es decir, dadas las magnitudes "A" y "B".

$$A \text{ I.P. } B \rightarrow A \cdot B = \text{constante}$$

Observación

Si:

$$A \text{ D.P. } B$$

$$A \text{ I.P. } C \quad \frac{A \cdot C}{B \cdot D^2} = \text{Constante}$$

$$A \text{ D.P. } D^2$$

Resolviendo en clase

- 1 Si la magnitud "F" es D.P. al cubo de "T", completa el siguiente cuadro y da "m + p".

F	m	625	40
T	4	p	2

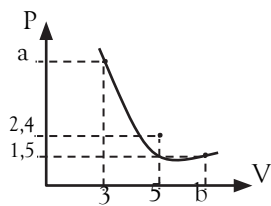
Resolución:

- 3 $\sqrt{A}$ es IP a B^2 y DP a $(C + D)$. Si $A = 16$ cuando $B = 6$, $C = 2$ y $D = 6$. Halla, A si $B = 18$; $C = 14$ y $D = 4$.

Resolución:

Rpta:

- 2 Si la siguiente gráfica representa dos magnitudes inversamente proporcionales, halla "a+b"



Resolución:

Rpta:

Rpta:

- 4 Si A IP B^2 , A IP $\sqrt{C}$ y A DP D^3 , encuentre una relación de proporcionalidad.

Resolución:

Rpta:

- 5 Si se cumpliera que el cuadrado del precio de un producto es DP a la raíz cuadrada de su peso, halla el peso de un artículo por el cual se pagó 6 dólares sabiendo que por un artículo de 49 gramos se pagó 2 dólares.

Resolución:

- 6 El precio de un diamante es directamente proporcional al cuadrado de su peso. Si un diamante que cuesta 6400 dólares accidentalmente se parte en dos pedazos, uno los $\frac{3}{5}$ del otro, ¿qué pérdida sufrió el diamante?

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. De la tabla, deduzca la relación de proporcionalidad entre A y B, y además halle $a + b$.

A	a	8	4	16	12
B	150	24	6	96	b

8. Sean 2 magnitudes A y B, tales que A es IP a B para $B \leq 30$, y A es DP a B para $B > 30$. Si $A=6$ cuando $B = 20$, halla A cuando $B = 60$.
9. Si $f_{(x)}$ es una función de proporcionalidad inversa, halla:
- $$\frac{f_{(12)} + f_{(6)}}{f_{(3)}}$$
10. Una rueda "A" de 50 dientes engrana con otra rueda "B" de 30 dientes. Si la diferencia entre el número de vueltas que han dado es 1 600, ¿cuántas vueltas ha dado la rueda "A"?
11. La energía almacenada en un condensador eléctrico es directamente proporcional al cuadrado de su diferencia de potencial. Si un condensador sometido a una diferencia de potencial de 80 voltios almacena una energía de 40 joules. ¿cual será la diferencia de potencial requerida para que la energía almacenada sea de 62,5 joules?
12. La velocidad del agua que atraviesa una tubería es inversamente proporcional a la sección recta de la misma y directamente proporcional al volumen de agua. Si por una tubería de 20 cm^2 de sección recta circulan 120 m^3 a razón de 15 m/s , ¿cuál será la sección de otra tubería por donde circulan 300 m^3 a razón de 20 m/s ?

Para reforzar

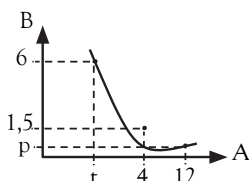
1. Si A y B son IP, calcula $a + n$.

- a) 150
b) 186
c) 173
d) 192
e) 204

A	30	12	a
B	n	15	1

2. Luego de construir la gráfica de dos magnitudes I.P se obtuvo el siguiente gráfico: Halla " $p + t$ "

- a) 2,5
b) 2
c) 1
d) 1,5
e) 0,5



3. Si A^2 es DP a $\sqrt{B}$, halla B cuando A es 2, sabiendo que $A=6$ cuando B es 9.

- a) $1/9$ b) $1/3$ c) 1
d) 3 e) 9

4. Si A DP a B ; A IP a C ; A DP a D^2 ; entonces:

- a) $\frac{AD^2}{B\sqrt{C}}=k$ b) $\frac{A\sqrt{C}}{BD^2}=k$ c) $\frac{AB}{\sqrt{C} \cdot D^2}=k$
d) $\frac{ABD^2}{\sqrt{C}}=k$ e) $\frac{A}{B\sqrt{C} \cdot D^2}=k$

5. El precio de venta de un libro es DP al costo unitario de los materiales es IP a la raíz cuadrada de su tiraje. Si para un tiraje de 3600 ejemplares y un costo de S/. 20 el precio de venta fue de S/.42, ¿cuál será el precio del libro para un tiraje de 2500 ejemplares y un costo de S/. 30?

- a) S/. 70 b) S/. 75,6 c) S/. 71,5
d) S/. 80,2 e) S/. 72,6

6. Se tiene un diamante que cuesta \$48000. Si éste se parte en 2 pedazos (uno el triple del otro), determina el costo total de ambos si sabiendo que el precio es DP al cuadrado de su peso.

- a) \$30 000 b) \$20 000 c) \$24 000
d) \$15 000 e) \$16 000

7. Si A y B son IP, calcula $m + n + a$.

- a) 150
b) 192
c) 165
d) 204
e) 173

A	30	12	m	a
B	n	15	10	1

8. El peso de un elefante es D.P. a la raíz cuadrada de su edad. Si un elefante de 36 años pesa 300 kg, ¿qué edad tendrá cuando pese 400 kg?

- a) 38 años b) 40 años c) 49 años
d) 54 años e) 64 años

9. El siguiente cuadro muestra los valores de dos magnitudes "A" y "B" que guardan cierta relación de proporcionalidad. Calcula " $x+y$ "

- a) 124
b) 118
c) 104
d) 240
e) 108

A	15	x	45	9
B	36	25	4	y

10. El precio de una revista varía inversamente proporcional con el número de ejemplares producidos y directamente proporcional con el número de días que toma su edición. Si una revista cuesta 20 soles y se imprimieron 3 500 ejemplares demorando su edición 15 días, ¿cual será el precio de otra revista de la que se imprimieron 2 000 ejemplares y su edición demoró 18 días?

- a) S/. 30 b) S/. 35 c) S/. 38
d) S/. 42 e) S/. 50

11. La potencia de un motor es directamente proporcional a la capacidad del motor e inversamente proporcional a los años de trabajo. Si un motor de 2,5 litros de capacidad y 5 años de uso tiene una potencia de 10 HP, halla la capacidad de otro motor que tiene 6 años de antigüedad y 15 HP de potencia.

- a) 4 litros b) 4,5 litros c) 3,5 litros
d) 5 litros e) 6 litros

12. La potencia consumida por un foco es D.P. al cubo de la raíz cuadrada del tiempo que está prendido. Si la potencia de un foco es 200 watts, ¿cuál será la potencia de otro foco si utiliza un tiempo igual al cuádruple del anterior?

- a) 1200 w b) 1500 w c) 1600 w
d) 2000 w e) 3000 w