

Álgebra

ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

1. VALOR ABSOLUTO

DEFINICIÓN

Se llama valor absoluto de un número real "x" y se denota por $|x|$ al número real no negativo que cumple:

$$|x| = \begin{cases} x; & x \geq 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

También:

$$|x| = \begin{cases} x; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

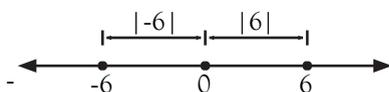
Ejemplos:

- * $|3| = 3$; pues $3 > 0$
- * $|x^2 + 1| = x^2 + 1$; pues $x^2 + 1 > 0$
- * $|-5| = -(-5) = 5$; pues $-5 < 0$
- * $|\sqrt{3} - \sqrt{7}| = -(\sqrt{3} - \sqrt{7}) = \sqrt{7} - \sqrt{3}$; pues $\sqrt{3} - \sqrt{7} < 0$
- * $|0| = 0$

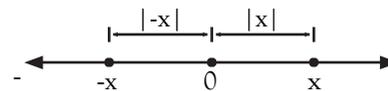
INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

La distancia de un número real al cero se denomina valor absoluto y se le representa entre barras.

Ejemplo:



El valor absoluto de -6 es 6, ya que la distancia de -6 al 0 es 6 y se representa como $|-6| = 6$. También $|6| = 6$.
En general:



2. PROPIEDADES

Para todo $x \in \mathbb{R}$; se cumple:

1. $|x| \geq 0$
2. $|-x| = |x|$
3. $|xy| = |x| \cdot |y|$
4. $\sqrt{x^2} = |x|$
5. $\sqrt[n]{x^{2n}} = |x|$
6. $\frac{|x|}{|y|} = \left| \frac{x}{y} \right|$
7. $|x^2| = |x|^2 = x^2$

3. ECUACIONES CON VALOR ABSOLUTO

Son aquellas donde la incógnita viene afectada por el operador $| \cdot |$.

Ejemplo 1:

$|3x| + 5 = 8$ es una ecuación con valor absoluto.
 $3x + |5| = 8$ NO es una ecuación con valor absoluto.

Resolución:

Para resolver una ecuación con valor absoluto se debe tener en cuenta la siguiente relación:

Si $|x| = a \Rightarrow a \geq 0$
se cumple que $x = a$ ($x = -a$)

Ejemplo 2:

Si $|x + 3| = 5$, encuentra x .

Resolución:

$$\begin{array}{l} x + 3 = 5 \quad (\quad x + 3 = -5 \\ x = 2 \quad \quad \quad x = -8 \end{array}$$

* También se cumple:

$$|x| = |y| \quad \text{TM} \quad x = y \quad (\quad x = -y)$$

Consecuencia:

$$|x| = |y| \quad \text{TM} \quad (x + y)(x - y) = 0$$

Ejemplo 3:

Resuelve $|3x + 5| = |x + 11|$

Resolución:

$$\begin{array}{l} 3x + 5 = x + 11 \quad (\quad 3x + 5 = -(x + 11) \\ 2x = 6 \quad \quad \quad 4x = -16 \\ x = 3 \quad \quad \quad x = -4 \end{array}$$

Ejercicios Resueltos

1. Resuelve la ecuación: $|x - 3| = -2x$

Resolución:

$$\begin{array}{l} |x - 3| = -2x \\ \text{TM} \quad -2x \in 0 \quad \text{y} \quad [x - 3 = -2x \quad \text{o} \quad x - 3 \\ = -(-2x)] \\ \text{TM} \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad [3x = 3 \quad \text{o} \quad x = -3] \\ \text{TM} \quad x \geq 0 \quad \text{y} \quad [x = 1 \quad \text{o} \quad x = -3] \\ \text{TM} \quad x \in \langle - , 0 \rangle = U \quad \text{y} \quad x \in \{1; -3\} \end{array}$$

Así, vemos que esta ecuación tiene una sola solución:

$$x = -3$$

2. Resuelve $|2x + 7| = x - 1$

Resolución:

$$\begin{array}{l} |2x + 7| = x - 1 \\ \text{TM} \quad \begin{cases} x - 1 \in 0 \quad \text{y} \\ [2x + 7 = x - 1 \quad \text{o} \quad 2x + 7 \\ = -(x - 1)] \end{cases} \\ \text{TM} \quad (x \in 1 \quad \text{y} \quad [x = -8 \quad \text{o} \quad x = -2]) \end{array}$$

Así, C.S. = $\{1, \rangle\} \{-2; -8\} = \emptyset$
(no existen soluciones)

3. Resuelve $|x^2 - 12x + 31| = 4$

Resolución:

$$\begin{array}{l} x^2 - 12x + 31 = 4 \\ (\quad x^2 - 12x + 31 = -4 \\ x^2 - 12x + 27 = 0 \\ (x - 3)(x - 9) = 0 \\ (\quad x^2 - 12x + 35 = 0 \\ (x - 7)(x - 5) = 0 \\ \therefore \text{C.S.} = \{3; 5; 7; 9\} \end{array}$$

4. Si $|2x + 3| = |6x - 5|$, calcula la suma de sus soluciones.

Resolución:

$$\begin{array}{l} 2x + 3 = 6x - 5 \quad (\quad 2x + 3 = 5 - 6x \\ 8 = 4x \quad \quad \quad 8x = 2 \\ x = 2 \quad \quad \quad x = 1/4 \end{array}$$

Luego, la suma de las soluciones será:

$$2 + 1/4 = \frac{9}{4}$$

Resolviendo en clase

1 Resuelve $|x - 4| = 5$ y señala el producto de sus raíces.

Resolución:

3 Resuelve $|2x + 8| = x - 1$ y señala la diferencia de sus raíces.

Resolución:

Rpta:

2 Resuelve $\left| \frac{x-2}{x-3} \right| = 4$ e indica el producto de raíces.

Resolución:

Rpta:

4 Resuelve $|x - 2| = |3x - 4|$ y señala la suma de los valores de "x".

Resolución:

Rpta:

Rpta:

5 Resuelve

$|x^2 - x + 2| = |x^2 - 2x - 4|$ e indica la suma de sus soluciones.

Resolución:

Rpta:

6 Resuelve

$$|x - 3|^2 - 3|x - 3| - 18 = 0$$

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Resuelve

$x + |x - 3| = |x + 2|$ e indica la suma de sus soluciones.

8. Luego de resolver

$||x - 3| - 4| = 2$, indica el producto de las raíces.

9. Halla la suma de todos los valores de x que satisfacen.

$$||x + 3| - 2|^2 - 6||x + 3| - 2| + 8 = 0$$

10. Resuelve $x^2 - 4|x| + 4 = 0$ e indica el número de soluciones.

11. Halla el número de soluciones de:

$$|x^2 - 9| = -2x + 6.$$

12. Resuelve

$|x^2 - 4x + 1| = |x^2 - 3x + 2|$ e indica el número de soluciones.

Para reforzar

- Resuelve $|x - 5| = 5$ y señala el producto de sus raíces.
a) 25 b) 0 c) 4
d) 15 e) -25
- Resuelve $|5x - 1| = 4x + 2$ y señala el cociente de sus raíces.
a) $-1/9$ b) 3 c) -27 d)
-9 e) $1/3$
- Resuelve $|x + 1| = x - 3$ e indica el número de soluciones.
a) b) 2 c) 1 d)
4 e) R
- Resuelve $|3x + 2| = |x - 2|$ y halla el producto de las soluciones.
a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4
- Resuelve $\left| \frac{x + 1}{+ 2} \right| = 3$ e indica la suma de x raíces.
a) $-17/4$ b) $-7/4$ c) $-5/2$ d)
-3 e) $5/2$
- Luego de resolver $|x + 2| + |3x + 4| = 6$, indica la suma de sus soluciones.
a) -3 b) 3 c) 0
d) 4 e) 6
- Resuelve $|x^2 - 4x + 1| = |x^2 + 4x + 2|$ e indica el número de soluciones.
a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) -3
- Halla la suma de los valores que satisface la ecuación:
 $|x^2 - 5x| = 6$
a) 10 b) 1 c) 2
d) 3 e) -6
- Resuelve $|x^2 - 4| = x - 2$ e indica el número de soluciones.
a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
- Resuelve $|3x - 2| = x + 1$ y halla el número de soluciones.
a) 1 b) 2 c) 3 d)
4 e) 5
- Resuelve $||x - 5| - 5| = 0$ e indica la mayor solución.
a) 10 b) 20 c) 31
d) 2 e) 1
- Resuelve $|2x + 1|^2 + 2|2x + 1| = 15$ e indica la menor solución.
a) -2 b) -1 c) 1
d) 3 e) 5