DESIGUALDADES

INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS REALES

Sea R el conjunto de números reales, provisto de dos operaciones; la adición **(+)**, la multiplicación (x) y una relación de orden **(<** : menor que) que constituye el **Sistema de los Números Reales**.

R : **(+, x, <)**
+ : adición
x : multiplicación
< : menor que

DEFINICIÓN

Si "a" y "b" denotan al mismo número real, escribiremos: a = b (que se lee "a igual a b"). Una expresión de este tipo se llama igualdad.

AXIOMAS DE LA ADICIÓN Y MULTIPLICACIÓN

1. Ley de Clausura o Cerradura

$(A_1)\ \forall\ a, b \in R : a + b \in R$

$(M_1)\ \forall\ a, b \in R : ab \in R$

2. Ley Conmutativa

$(A_2)\ \forall\ a, b \in R : a + b = b + a$

$(M_2)\ \forall\ a, b \in R : ab = ba$

3. Ley Asociativa

$(A_3)\ \forall\ a, b, c \in R : a + (b + c) = (a + b) + c$

$(M_3)\ \forall\ a, b, c \in R : a(bc) = (ab)c$

Observaciones

0 : Neutro aditivo
1 : Neutro multiplicativo

4. Ley de la Existencia y Unicidad del Elemento Neutro

$(A_4)\ \forall\ a \in R : \exists!\ 0 \in R / a + 0 = 0 + a = a$

$(M_4)\ \forall\ a \in R : \exists!\ 1 \in R / a . 1 = 1 . a = a$

5. Ley de la Existencia y Unicidad del Elemento Inverso

$(A_5)\ \forall\ a \in R : \exists!\ (-a) \in R / a + (-a) = (-a) + a = 0$

$(M_5)\ \forall\ a \in R - \{O\} : \exists!\ a^{-1} \in R / a . a^{-1} = a^{-1} . a = 1$

6. Ley Distributiva

$(D_1)\ \forall\ a, b, c \in R : a(b + c) = ab + ac$
(por la izquierda)

$(D_2)\ \forall\ a, b, c \in R : (b + c)a = ba + ca$
(por la derecha)

AXIOMAS DE LA IGUALDAD

1. Reflexiva:
$\forall\ a \in R : a = a$

2. Simétrica:
$\forall\ a, b \in R : \text{si } a = b \rightarrow b = a$

3. Transitiva:
$\forall\ a, b, c \in R : \text{si } a = b \text{ y } b = c \rightarrow a = c$

Observaciones

(-a) : Inverso aditivo u opuesto a^{-1} ó 1/a : Inverso multiplicativo o recíproco

TEOREMAS BÁSICOS DE LA IGUALDAD

1. Si $a = b$; entonces $a + c = b + c$, $\forall$ a, b, c $\in$ R.
2. Si $a = b$; entonces $ac = bc$, $\forall$ a, b, c $\in$ R.
3. Si $a \cdot c = b \cdot c$; entonces $c = 0$ ó $a = b$, $\forall$ a, b, c $\in$ R.
4. $a \cdot 0 = 0$, $\forall$ a $\in$ R.
5. $a \cdot b = 0 \leftrightarrow a = 0 \vee b = 0$.

RELACIÓN DE ORDEN

$$a < b \leftrightarrow b - a > 0$$

AXIOMA DE TRICOTOMÍA

$\forall$ a $\in$ R se cumple una y solamente una de las siguiente relaciones:

$$a > 0 \vee a < 0 \vee a = 0$$

TEOREMAS BÁSICOS DE LA DESIGUALDAD

1. $a < b \rightarrow a + c < b + c$; $\forall$ a, b, c $\in$ R
2. $a < b \wedge c > 0 \rightarrow ac < bc$; $\forall$ a, b $\in$ R
3. $a < b \wedge c < 0 \rightarrow ac > bc$, $\forall$ a, b $\in$ R
4. $ab > 0 \leftrightarrow \{(a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)\}$

   (signos iguales)
5. $ab < 0 \leftrightarrow \{(a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)\}$

   (signos diferentes)
6. $\forall$ a $\in$ R - {0} : a y a^{-1} presentan el mismo signo.

   $a > 0 \rightarrow (1/a) > 0$

   $a < 0 \rightarrow (1/a) < 0$
7. $a < b \rightarrow a^{2n-1} < b^{2n-1}$, $\forall$ n $\in$ N
8. $0 < a < b \rightarrow a^{2n} < b^{2n}$, $\forall$ n $\in$ N
9. $a < b < 0 \rightarrow a^{2n} > b^{2n}$, $\forall$ n $\in$ N
10. Si $a < x < b \wedge ab < 0$; entonces $0 \le x^2 \le \text{máx}(a^2, b^2)$
11. Si $a < b \wedge c < d$; entonces $a + c < b + d$
12. Si $0 < a < b \wedge 0 < c < d$; entonces $ac < bd$
13. Si $0 < a < b$; entonces:

    $$a < \frac{a+b}{2} < b$$
14. Si $0 < a < b$; entonces $a < \sqrt{ab} < b$
15. Para dos números reales positivos "a" y "b".
16. Si $0 < a/b < c/d$; entonces:

    $$\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

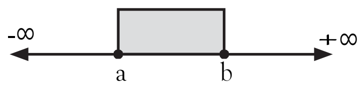
    $$\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}} \ge \frac{a+b}{2} \ge \sqrt{ab} \ge \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

INTERVALOS

Son conjuntos de números definidos mediante la relación de orden en el campo de los números reales y son de varias clases.

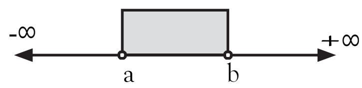
A. Intervalo Cerrado

$[a; b] = \{x \in R / a \le x \le b\}$ en el cual se incluye a los extremos a y b en la recta real.



B. Intervalo Abierto

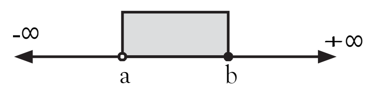
$\langle a; b\rangle = \{x \in R / a < x < b\}$ en el cual no se incluye a los extremos a y b en la recta real.



C. Intervalos Semiabiertos

$$[a; b\rangle = \{x \in R / a \le x < b\}$$

$$\langle a; b] = \{x \in R / a < x \le b\}$$

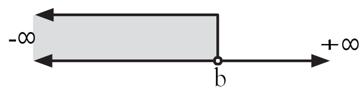


D. Intervalos Infinitos

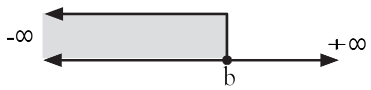
$$\langle a; +\infty\rangle = \{x \in R / x > a\}$$

$$[a; +\infty\rangle = \{x \in R / x \ge a\}$$

$$\langle -\infty; b\rangle = \{x \in R / x < b\}$$



$$\langle -\infty; b] = \{x \in R / x \le b\}$$

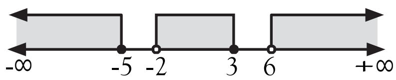


Observaciones

$R = <-\infty, +\infty>$
$R^{+} = <0, +\infty>$
$R^{-} = <-\infty, 0>$
$[a; a] = \{a\}$
$<a; a> = \varphi$

Ejemplo:

Expresa en forma de intervalo:



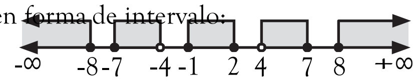
Resolución:

Del gráfico, se tiene:

$x \in <-\infty; -5] \cup <-2; 3] \cup <6, +\infty>$

Ejemplo:

Expresa en forma de intervalo:



Resolución:

Del gráfico:

$x \in <-\infty; -8] \cup [-7; -4> \cup [-1, 2] \cup <4, 7] \cup [8, +\infty>$

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Si $x \in <2; 3]$, calcula el intervalo de variación de:

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

Resolución:

Completamos cuadrados en "f(x)"

$$f(x) = x^2 + 2x + 1 - 1 - 4$$
$$f(x) = (x + 1)^2 - 5$$

tomamos: $x \in <2; 3]$

$$2 < x \leq 3$$
$$3 < x + 1 \leq 4$$
$$9 < (x + 1)^2 \leq 16$$
$$4 < (x + 1)^2 - 5 \leq 11$$

2. Si $x \in [5, 8]$, indica el mayor valor que toma la expresión:

$$f(x) = \frac{x - 3}{x + 1}$$

Resolución:

Transformamos a "f(x)" en:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x + 1}$$

como: $x \in [5, 8]$

$$5 \leq x \leq 8$$
$$6 \leq x + 1 \leq 9$$
$$1/9 \leq 1/(x + 1) \leq 1/6$$
$$4/9 \leq 4/(x + 1) \leq 2/3$$
$$-4/9 \geq -4/(x + 1) \geq -2/3$$
$$5/9 \geq 1 - 4/(x + 1) \geq 1/3$$

¥ $\boxed{f(x) \in [1/3, 5/9]}$

3. ¿Cuál es el mínimo valor que toma la expresión:
$f(x) = x^2 - 6x + 2$?

Resolución:

Completando cuadrados:

$$f(x) = \underbrace{x^2 - 6x + 9} - 9 + 2$$
$$f(x) = \underbrace{(x - 3)^2}_{0} - 7$$

¥ $\boxed{f(x)_{mín} = -7}$

4. Sabiendo que $a, b \in R$, y además: $a^2 - 4a + b^2 = 2b - 5$, halla: $E = a^3 + b^2$

Resolución:

$$a^2 - 4a + b^2 - 2b + 5 = 0$$
$$\underbrace{a^2 - 4a + 4} + \underbrace{b^2 - 2b + 1} = 0$$
$$\underbrace{(a - 2)^2}_{0} + \underbrace{(b - 1)^2}_{0} = 0$$
$$\Rightarrow \quad a = 2 \qquad b = 1$$
$$E = 2^3 + 1^2$$

¥ $\boxed{E = 9}$

Resolviendo en clase

1 Si $x \in [1,\ 3]$, indica a qué intervalo pertenece la expresión:

$$f(x) = 2x + 3$$

Resolución:

Rpta:

2 Si: $\{x; y; z\} \subset \mathbb{R}^+$

Calcular el mínimo valor de:

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$$

Resolución:

Rpta:

3 Si:

$x \in \langle -1,\ 2 \rangle$, ¿a qué intervalo pertenece

$y = \dfrac{4 - 2x}{3}$?

Resolución:

Rpta:

4 Si $x \in \langle 2,\ 3]$; calcula el intervalo de:

$$f(x) = x^2 + 2x - 4$$

Resolución:

Rpta:

5 **Si:**

$2 < 4x < 10$; calcula el intervalo de $\dfrac{16}{2x + 3}$

Resolución:

Rpta:

6 **Si $x \in [5, 8]$; indica el mayor valor que toma la expresión:**

$$\frac{x - 3\ x}{+\ 1}$$

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Si:

$x \in [-2, 3]$; indica el intervalo de $y = x^2$.

8. Si $a, b, c \in R^+$, ¿cuál es el menor valor de K?

$$K = \frac{(a + b)^2}{ab} + \frac{(b + c)^2}{bc} + \frac{(a + c)^2}{ac} - 6$$

9. Calcula el menor valor de:

M si $4x - x^2 - 10 \leq M$ para todo valor real de x.

10. Indica cuál es el máximo valor que toma la expresión:

$$f(x) = -x^2 + 2x + 9$$

11. Si la suma de dos cantidades positivas es 20, halla el mayor valor que toma el producto.

12. Si $x \in <-2, 5]$; halla el intervalo de variación de

$$\frac{2x + 1}{x - 6}$$

Para reforzar

1. Si $x \in [-1, 4]$, indica el intervalo de la expresión $f(x) = 4x + 1$

a) $[-1, 13]$ b) $[13, 17]$ c) $[5, 13]$
d) $[-3, 17]$ e) $[3, 15]$

2. Calcula el mayor valor entero que toma:

$$y = \frac{3x - 1}{4} \text{ si } x \in [3, 7>$$

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 7

3. Si $x \in [-4, 1>$; indica el intervalo de $y = x^2 + 1$.

a) $[1, 17]$ b) $<1, 17]$ c) $[0, 17]$
d) $[0, 17>$ e) $[1, 17>$

4. Si $1 \leq x < 6$; calcula el intervalo de $f(x) = x^2 - 6x + 5$

a) $[-4, 5>$ b) $[-5, 4]$ c) $<-5, 4>$
d) $[-9, -4>$ e) $[5, 9]$

5. Indica cuál es el mínimo valor que toma la expresión:

$$f(x) = x^2 - 6x + 2$$

a) -5 b) -6 c) -7
d) -8 e) -9

6. Si $1 \leq x < 3$; calcula el intervalo de:

$$f(x) = \frac{1}{x + 2}$$

a) $<1/5, 1/3>$ b) $<1/5, 1/3]$
c) $[1/5, 1/3>$
d) $[1/3, 2/5>$ e) $[1/3, 3/5>$

7. Si $x \in [2, 3]$; indica el intervalo de $\dfrac{3x + 3}{3x - 2}$

a) $[12/5, 9/2]$ b) $[12/7, 9/4]$
c) $[7/5, 9/4]$
d) $[5/7, 5/4]$ e) $[2/3, 4/3]$

8. Si $3 \leq x \leq 7$; además la expresión

$M = \dfrac{2x + 1}{2x - 5}$ pertenece al intervalo $[a, b]$. Calcula $3a + 2b$.

a) 12 b) 14 c) 19
d) 31 e) 27

9. Indica cuál es el máximo valor que toma la expresión:

$$y = x^2 - 6x - 1 \text{ si } -1 \leq x \leq 5$$

a) -10 b) 10 c) 8
d) -4 e) 6

10. Si:
$a + b + c = 6$
$\{a; b; c\} \subset$ □+. Calcular el máximo valor de:
abc.

a) 3 b) 9 c) 18
d) 27 e) 81

11. Si $x \in [-1, 9/5]$ y $A \leq \dfrac{3 - 5x}{2} \leq B$, calcula el valor de $A^2 + B^2$.

a) 12 b) 13 c) 25
d) 34 e) 26

12. Si $x \in [-2, 5>$; indica el intervalo de:

$$f(x) = (x - 3)^2$$

a) $[4, 25>$ b) $[4, 25]$
c) $[4, 22>$
d) $[0, 25]$ e) $[0, 4]$