



Geometría

CIRCUNFERENCIAS

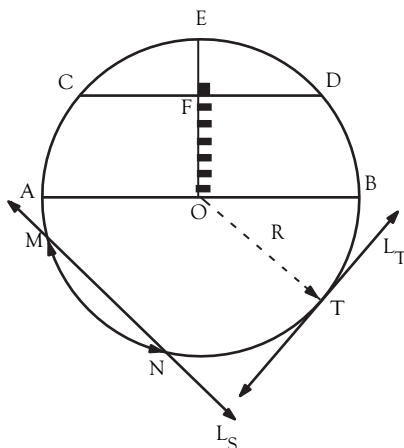
Introducción

El hombre, debido a su interacción con la realidad, descubrió la rueda. Los caldeos hacia el tercer milenio a.C., dieron la división del círculo en 360 partes. Ellos tomaron por base la división del año en 360 días. Así les era fácil dividir el círculo y la circunferencia en 6 partes iguales.

Definición

La circunferencia es un conjunto de puntos de un plano que equidista de otro punto denominado centro. A la distancia de estos puntos se le denomina radio de la circunferencia.

Líneas Asociadas a la Circunferencia

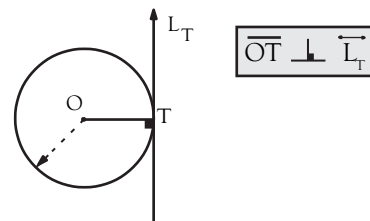


Se tiene la circunferencia de centro "O" y de radio "R".

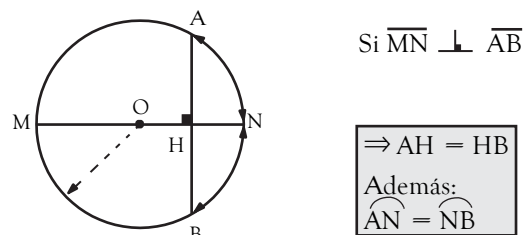
- Cuerda: $\overline{CD}$
- Diámetro: $\overline{AB}$
- Flecha o Sagita: $\overline{EF}$
- Recta Tangente: $\overline{L_T}$
- Recta Secante: $\overline{L_S}$
- Arco: Es una porción de la circunferencia determinada por dos puntos de la misma, denominados extremos del arco.
- Arco: $\widehat{MN}$

Propiedades Fundamentales en toda Circunferencia

- **Teorema I :** La recta tangente a la circunferencia es perpendicular al radio trazado en el punto de tangencia.

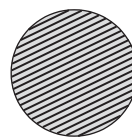


- **Teorema II :** Todo diámetro, perpendicular a una cuerda, biseca a dicha cuerda y a su arco.

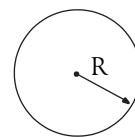


NOTA:

*El Círculo

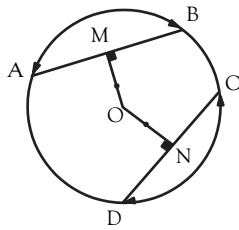


*La Circunferencia



- La medida angular de la circunferencia es 360° .
- La longitud de la circunferencia es $2\pi R$.

- **Teorema III :** Dos cuerdas de igual longitud generan arcos de igual medida.

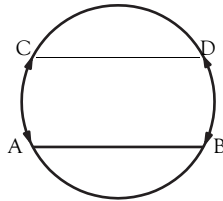


Si $AB = CD$

$$\Rightarrow m\widehat{AB} = m\widehat{CD}$$

$$\boxed{OM = ON}$$

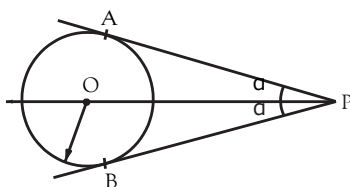
- **Teorema IV :** En una circunferencia, los arcos determinados por cuerdas paralelas son de igual medida.



Si $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$

$$\Rightarrow m\widehat{AC} = m\widehat{DB}$$

- **Teorema V :** Siempre dos segmentos tangentes a una circunferencia, trazados desde un punto exterior, son de igual longitud.

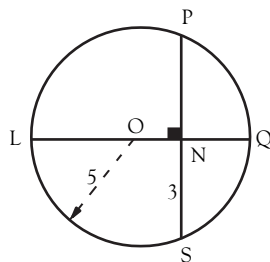


$$\boxed{PA = PB}$$

$\overline{PO}$: Bisectriz

Ejemplo:

Calcule: PQ si $\overline{LQ}$ es diámetro.



Resolución:

Como $\overline{LQ} \perp \overline{PS}$ y por el teorema II

$$PN = NS = 3$$

Luego: $(OP)^2 = (PN)^2 + (ON)^2$

$$(5)^2 = (3)^2 + (ON)^2$$

$$(ON)^2 = 16$$

$$ON = 4$$

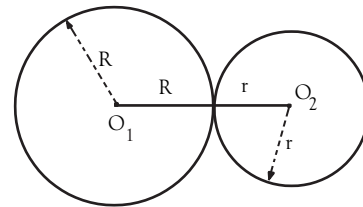
$\Rightarrow (PQ)^2 = (PN)^2 + (NQ)^2$

$$(PQ)^2 = 3^2 + 1^2 = 10$$

$$PQ = \sqrt{10}$$

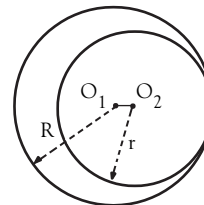
Posiciones Relativas de dos Circunferencias

1. TANGENTES EXTERIORES



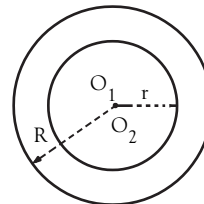
$$\boxed{O_1O_2 = R + r}$$

2. TANGENTES INTERIORES



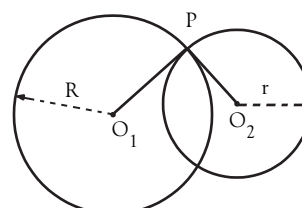
$$\boxed{O_1O_2 = R - r}$$

3. CONCÉNTRICAS



$$\boxed{O_1O_2 = 0}$$

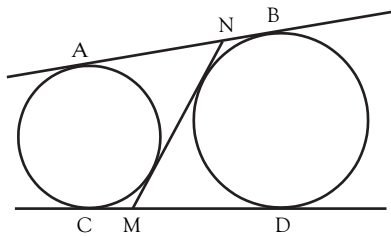
4. ORTOGONALES



$$\boxed{m\angle Q_1PO_2 = 90^\circ}$$

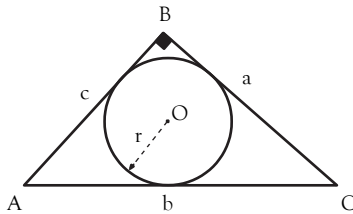
Propiedades

1. TEOREMA ESPECIAL



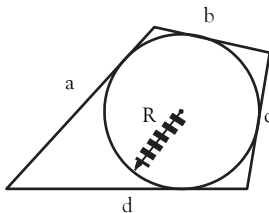
$$AB = CD = NM$$

2. TEOREMA DE PONCELET

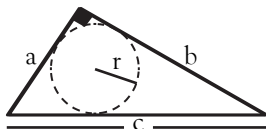


$$a + c = b + 2r$$

3. TEOREMA DE PITOT



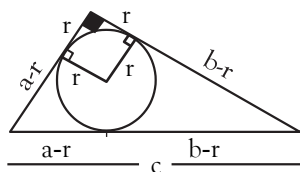
$$a + c = b + d$$



$$a + b = c + 2r$$

Demostración

Llevando el inradio hacia los catetos y por tangentes.



$$a-r+b-r=c$$

Luego: $a+b = c + 2r$

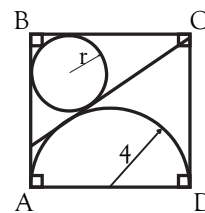
Observación

Teorema de Poncelet

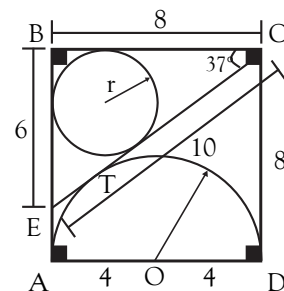
En todo triángulo rectángulo, la suma de la media de los catetos es igual a la hipotenusa más el doble del inradio.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcule "r" si ABCD es un cuadrado.



Resolución:



Sabemos que:

$$m\angle TCD=53^\circ \rightarrow m\angle BCE=37^\circ$$

$\triangle EBC$ notable aproximado, si $BC=8$

$$\rightarrow BE=6 \text{ y } EC=10$$

Por el teorema de Poncelet en dicho triángulo rectángulo:

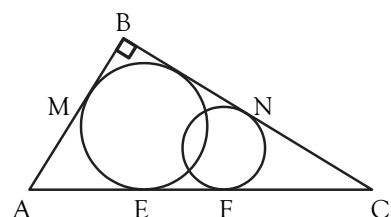
$$6+8=10+2r$$

$$2r=14-10$$

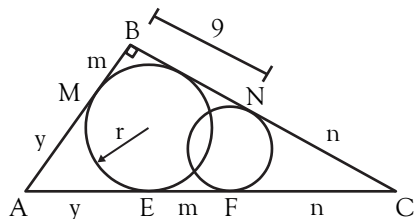
$$2r=4$$

$$r=2$$

2. En la figura. Si M, N, E y F son puntos de tangencia; $BM=EF$, $BN=9$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscrita en el triángulo rectángulo ABC.



Resolución:



Dato: $BM=EF=m$ y $BN=9$

Se pide calcular "r".

$\triangle ABC$, por el teorema de Poncelet:

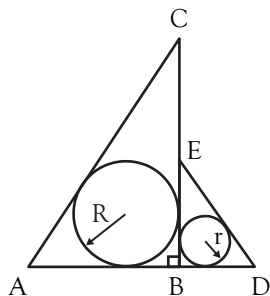
$$m+y+9+n=2r+y+m+n$$

$$2x=9$$

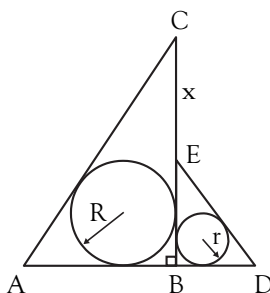
$$x=4,5$$

3. En la figura.

Si $AC-AB=ED-BD$, calcule CE.



Resolución:



Por el teorema de Poncelet en el $\triangle ACB$:

$$CE+EB+AB=AC+2R \quad \dots(1)$$

Por el teorema en el $\triangle EBD$:

$$EB+BD=ED+2r \quad \dots(2)$$

Restando (1)-(2):

$$CE+EB+AB-EB-BD=AC-ED+2R-2r$$

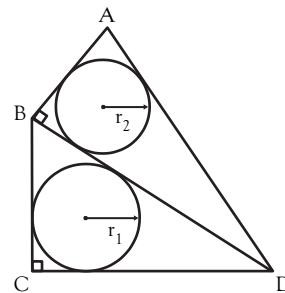
$$CE+(ED-BD)=(AC-AB)+2R-2r$$

Por dato: $AC-AB=ED-BD$

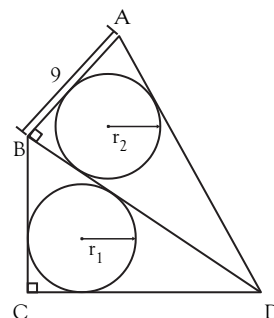
$$CE=2R-2r$$

$$x=2(R-r)$$

4. En la figura, si $AB=9$ y $AD=BC+CD$. Calcule " r_1+r_2 ".



Resolución:



Por el teorema de Poncelet:

$$\triangle BCD: BC+CD=2r_1+BD \quad \dots(1)$$

$$\triangle ABD: AB+BD=AD+2r_2 \quad \dots(2)$$

Sumando (1) y (2):

$$(BC+CD)+AB+BD=AD+BD+2(r_1+r_2)$$

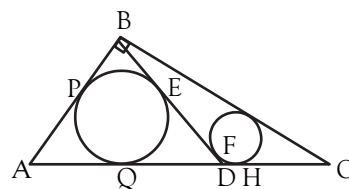
$$\text{dato AD} \quad 9$$

$$AD+9=AD+BD+2(r_1+r_2)$$

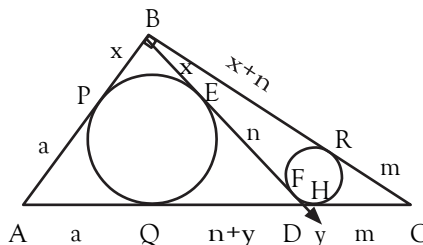
$$r_1+r_2=9/2$$

$$r_1+r_2=4,5$$

5. Calcule la longitud del inradio del triángulo rectángulo ABC si $\overline{BD}$ es ceviana. Además: $BE-FD=8\mu$



Resolución:



Dato: $x-y=8 \quad \dots(1)$

Si "r" es la longitud del inradio del $\triangle ABC$; por el teorema de Poncelet tenemos:

$$(a+x)+(x+n+m)=(a+n+y+y+m)+2r$$

$$2x=2y+2r$$

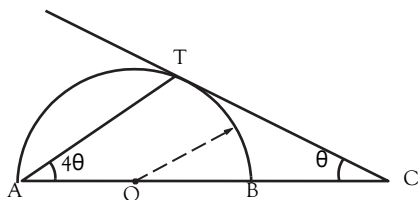
$$r=x-y \quad \dots(2)$$

De (1) y (2):

$$r=8\mu$$

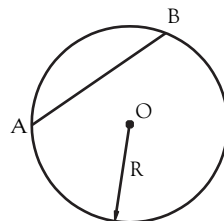
Resolviendo en clase

- 1 Calcule θ (T es punto de tangencia).



Resolución:

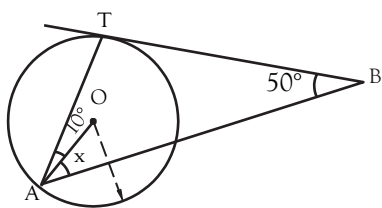
- 3 Calcule la longitud de la flecha de la cuerda AB si $\overline{AB} = 30$ y $R = 17$.



Resolución:

Rpta:

- 2 Si O es centro y T punto de tangencia, calcule x.

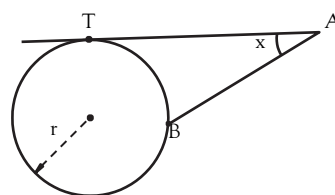


Resolución:

Rpta:

Rpta:

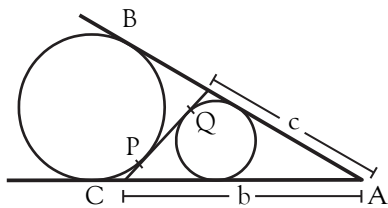
- 4 Calcule x, si T es punto de tangencia, $m\widehat{TB} = 90^\circ$, $AT = 7$ y $r = 3$.



Resolución:

Rpta:

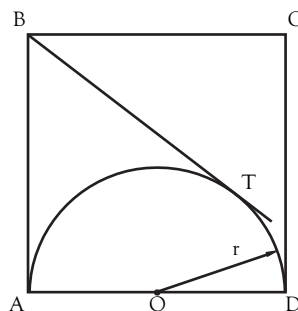
- 5 Calcule PQ si $b=7$ cm y $c=4$ cm.



Resolución:

Rpta:

- 6 Calcule $m\angle TBC$ si ABCD es un cuadrado y T es punto de tangencia.

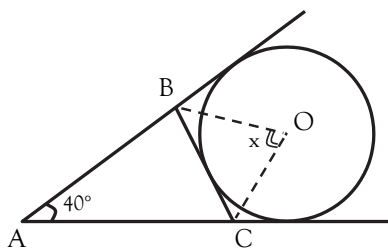


Resolución:

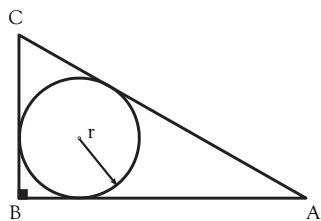
Rpta:

Ahora en tu cuaderno

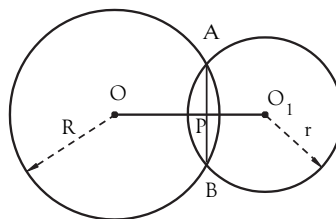
7. Calcule x si "O" es centro.



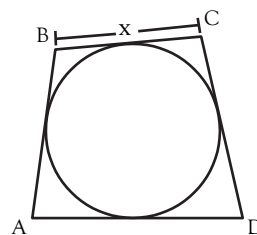
8. Calcule r si $AB=12$ y $BC=15$.



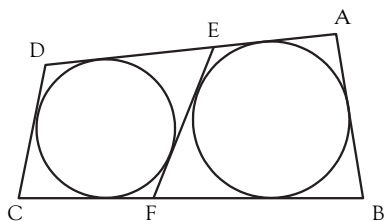
9. Calcule OP si los diámetros de las circunferencias mostradas miden $16\sqrt{5}$ cm y 10 cm, y además $OO_1 = 9$ cm ($R > r$).



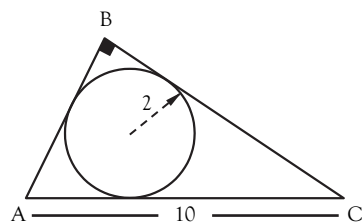
10. Calcule x si $a-b=4$, $AD=b$, $AB=a$ y $CD=6$



11. Calcule EF si $AD + BC = 28$ y $AB + CD = 20$.

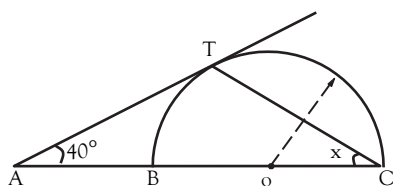


12. En la figura mostrada, calcule el perímetro del triángulo rectángulo ABC.



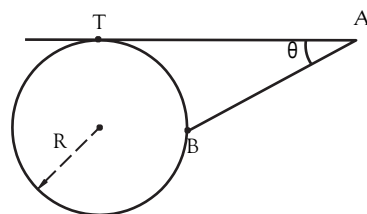
Para reforzar

1. Calcule x , siendo T punto de tangencia.



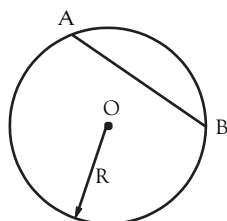
- a) 10° b) 50° c) 25°
d) 40° e) 80°

3. Calcule θ si T es punto de tangencia, $m\widehat{TB} = 90^\circ$, $AT = 7$ y $R = 4$.



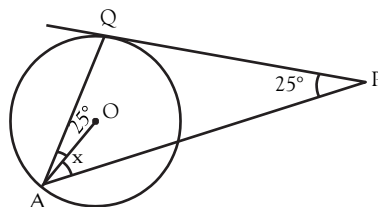
- a) 60° b) 53° c) 15°
d) 45° e) 30°

2. Calcule la longitud de la flecha de la cuerda $\overline{AB}$ si $AB = 24$ y $R = 15$.



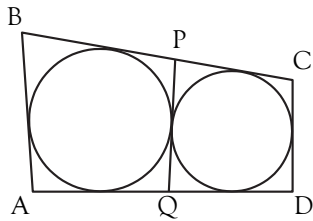
- a) 6 b) 2 c) 1
d) 3 e) 4

4. Calcule x si O es centro y Q es punto de tangencia.



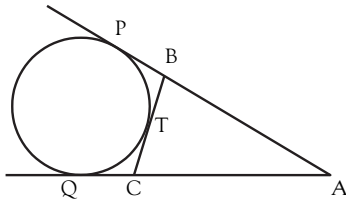
- a) 10° b) 30° c) 40°
d) 15° e) 60°

5. En la figura, $AB + CD = 24$ m y $BC + AD = 40$ m. Calcule "PQ".



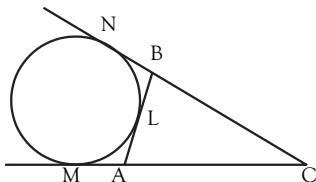
- a) 16 m b) 14 m c) 12 m
d) 10 m e) 8 m

6. Si $BC = 15$, $AB = 13$ y $AC = 14$, calcule AQ (P, Q y T son puntos de tangencia).



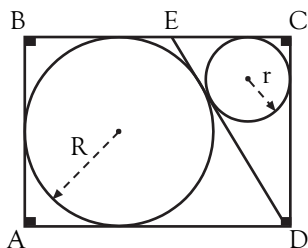
- a) 20 b) 18 c) 15
d) 23 e) 21

7. Calcule CM si $AB = 5$, $BC = 6$ y $AC = 7$ (M, L y N son puntos de tangencia).



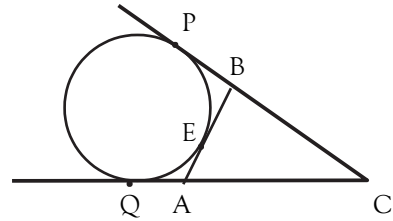
- a) 8 b) 5 c) 9
d) 7 e) 6

8. Del gráfico, $R = 3$ y $r = 1$. Calcule "BE".



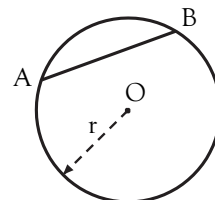
- a) 3,5 b) 4 c) 5
d) 5,5 e) 6

9. Si P, E y Q son puntos de tangencia y el perímetro del triángulo ABC es 80 u, calcule QC.



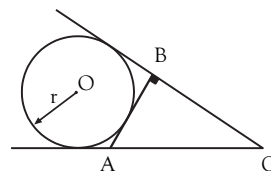
- a) 12 u b) 18 u c) 24 u
d) 48 u e) 40 u

10. Calcule la longitud de la flecha correspondiente a AB si $AB = 8$ y $r = 5$.



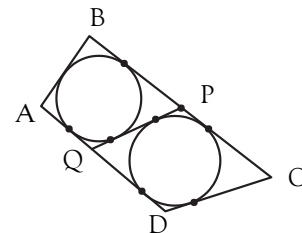
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 2,5 e) 3,5

11. Calcule r si $AB = 12$ m y $BC = 5$ m.



- a) 2 m b) 3 m c) 4 m d)
5 m e) 10 m

12. Calcule PQ si $AB + CD = 24$ m. y $BC + AD = 40$ m.



- a) 16 m b) 14 m c) 12 m
d) 10 m e) 8 m