Triángulo Educativo

Álgebra

4° SECUNDARIA

ECUACIONES DE 2DO GRADO I

DEFINICIÓN

Una ecuación de segundo grado en "x" es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, siendo "a", "b" y "c" constantes y $a \neq 0$.

Por ejemplo, $x^2 - 6x + 5=0$, $2x^2 + x -=0$ y $3x^2 - 5=0$, son ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Las dos últimas ecuaciones se pueden dividir por 2 y 3, respectivamente, obteniéndose $x^2 + 1/2x - 3 = 0$ y $x^2 - 5/3 = 0$, siendo en ambos casos el coeficiente de x^2 igual a1.

Una ecuación cuadrática pura es aquella que carece de término en "x"; por ejemplo: $4x^2 - 5 = 0$

RESOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DE SEGUNDO GRADO

Es hallar los valores de "x" que la satisfagan. Estos valores reciben el nombre de soluciones o raíces de la ecuación dada.

Por ejemplo : $x^2 - 5x + 6=0$ se satisface para $x=2$ y $x=3$. Por tanto, $x = 2$ y $x = 3$ son soluciones o raíces de la citada ecuación.

MÉTODOS DE RESOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

A) ECUACIONES CUADRÁTICAS PURAS

Ejemplos:

1) Resuelve : $x^2 - 4 = 0$

   Tendremos $x^2=4$, $x=\pm 2$, y las raíces son $x=2$, -2.

2) Resuelve: $2x^2 - 21 = 0$
   Tendremos $x^2 = 21/2$
   y las raíces son $x = \pm\sqrt{21/2} = \pm\sqrt{42}/2$

3) Resuelve: $x^2 + 9 = 0$
   Tendremos $x^2 = -9$
   y las raíces son $x = \pm\sqrt{-9} = \pm 3i$

B) POR DESCOMPOSICIÓN DE FACTORES

Ejemplos:

4) Resuelve:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Se puede escribir en la forma $(x - 3)(x - 2) = 0$. El producto de los dos factores será cero cuando lo sea uno cualquiera de ellos o ambos a la vez.

Si $x - 3 = 0$, $x = 3$; si $x - 2 = 0$, $x = 2$. Por consiguiente, las soluciones son $x = 3$, $x = 2$.

5) Resuelve:

$$3x^2 + 2x - 5 = 0$$

Se puede escribir en la forma $(3x + 5)(x - 1) = 0$. Por tanto, de $3x+ 5 = 0$ y $x - 1 = 0$ se obtienen las soluciones $x = -5/3$ y $x = 1$.

6) Resuelve:

$$x^2 - 4x + 4 = 0$$

Se puede escribir en la forma $(x - 2)(x - 2) = 0$. Por tanto, la ecuación tiene la raíz doble $x = 2$.

C) FORMANDO UN CUADRADO PERFECTO

Ejemplos:

7) Resuelve:

$$x^2 - 6x - 2 = 0$$

Se escribe en un miembro los términos con la incógnita y se pasa el término independiente al otro miembro:

$$x^2 - 6x = 2$$

Sumando 9 a ambos miembros el primero se transforma en un cuadrado perfecto, es decir:

$$x^2 - 6x + 9 = 2 + 9$$

o

$$(x - 3)^2 = 11$$

de donde $x - 3 = \pm\sqrt{11}$ y las raíces son $x = 3 \pm \sqrt{11}$

8) Resuelve:

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

Dividiendo por 3:

$$x^2 - 5x/3 = -1/3$$

Sumando $[1/2\ (-5/3)]^2 = 25/36$ a los dos miembros:

$$\begin{aligned} x^2 - 5/3\,x + 25/36 &= -1/3 + 25/36 \\ &= 13/36\ , \\ (x - 5/6)^2 &= 13/36 \\ x - 5/6 &= \pm\sqrt{13}/6 \text{ y} \\ x &= 5/6 \pm \sqrt{13}/6 \end{aligned}$$

D) APLICANDO LA FÓRMULA GENERAL

Las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$ vienen dadas por la fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

en la que: "$b^2 - 4ac$", recibe el nombre de **discriminante** de la ecuación cuadrática.

Ejemplo:

9) Resuelve:

$$3x^2 - 5x + 1 = 0$$

En este caso a = 3, b = -5, c = 1, por tanto:

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(3)(1)}}{2(3)}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{13}}{6} \qquad \text{como en el ejemplo 8}$$

E) GRÁFICAMENTE

Las raíces o soluciones reales de $ax^2 + bx + c = 0$ son los valores de "x" que corresponden a $y = 0$ en la gráfica de la parábola $y = ax^2 + bx + c$.

Esto es, las soluciones son las abscisas de los puntos en los que la parábola corta al eje "x".

Si la curva no corta al eje x, las raíces son imaginarias.

EJERCICIOS RESUELTOS

Ejemplo 1:

Halla "k" si la ecuación:

$x^2 - (k + 3)x + 3k = 0$

tiene raíces iguales.

Resolución:

$$\Delta = 0$$
$$(k + 3)^2 - 4(1)(3k) = 0$$
$$k^2 + 6x + 9 - 12k = 0$$
$$k^2 - 6k + 9 = 0$$
$$(k - 3)^2 = 0$$
$$\therefore \boxed{k = 3}$$

Ejemplo 2:

Si se tiene que "x_1", y "x_2" son raíces de $3x^2 - 15x + 6 = 0$, halla el valor de:

$E = (1 + x_2)(1 + x_1) + 3$

Resolución:

De la ecuación:

$$x_1 + x_2 = \frac{15}{3} = 5$$
$$x_1x_2 = \frac{6}{3} = 2$$
$$\Rightarrow E = 1 + \underbrace{(x_1 + x_2)}_{5} + \underbrace{x_1\,x_2}_{2} + 3$$
$$\boxed{E = 11}$$

Ejemplo 3:

En la ecuación:

$5x^2 - (a + 3)x + 2 = 0$

La suma de raíces es 7/2. Indica el valor de "a".

Resolución:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$
$$\frac{7}{2} = \frac{-[-(a + 3)]}{5}$$
$$35 = 2a + 6$$
$$\boxed{\frac{29}{2} = a}$$

Ejemplo 4:

Sea la ecuación cuadrática:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

si una raíz es el doble de la otra, la relación de los coeficientes debe ser:

Resolución:

Sea: $x_1 = m$; $x_2 = 2m$

$$\Rightarrow x_1 + x_2 = 3m \wedge x_1\,x_2 = 2m^2$$

$$\frac{-b}{a} = 3m \qquad \frac{c}{a} = 2\left(\frac{-b}{3a}\right)^2$$

$$\frac{-b}{3a} = m \qquad \frac{c}{\cancel{a}} = 2\,\frac{b^2}{9a^{\cancel{2}}}$$

$$\boxed{9ac = 2b^2}$$

Ejemplo 5:

Sea $a < 0 \wedge b > 0$, indica la mayor raíz de:

$$x^2 - (5a + 2b)x + 10ab = 0$$

Resolución:

Factorizamos:

$$x^2 - (5a + 2b)x + 10ab = 0$$
$$\begin{array}{lcl} x & & -5a \\ x & & -2b \end{array}$$
$$(x - 5a)\;(x - 2b) \;= 0$$

$$\therefore x = 5a \quad \wedge \quad x = 2b$$

La mayor raíz es "2b".

Resolviendo en clase

1 Resuelve:

$$3x^2 = 12 - 5x$$

e indica una de las soluciones.

Resolución:

Rpta:

2 En la siguiente ecuación :

$$2x^2 - 4x + 6 = 0$$

Las raíces son x_1 y x_2. Halla $x_1^2 + x_2^2$.

Resolución:

Rpta:

3 Resuelve:

$$x^2 - 30x + 221 = 0$$

e indica la mayor solución.

Resolución:

Rpta:

4 Resuelve si $k > 0$:

$$9x^2 - 6x + 1 = k^2$$

e indica la menor raíz.

Resolución:

Rpta:

5 **Si se tiene que x_1 y x_2 son raíces de:**

$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

Halla el valor de $(1 + x_1)(1 + x_2)$.

Resolución:

Rpta:

6 **Halla "m" si la ecuación:**

$$x^2 - 2x + m - 7 = 0$$

tiene raíces iguales.

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Halla "n" para que en la ecuación de segundo grado la suma de raíces sea 8:

$$(2n - 3)x^2 - (15n + 10)x + n - 2 = 0$$

8. Encuentra el valor de "m" si en:

$$x^2 + 9x + m = 0$$

una raíz es el doble de la otra.

9. Siendo α y β raíces de la ecuación:

$$2x^2 - 3x + 5 = 0$$

Halla: $M = 1/\alpha + 1/\beta$

10. Si "α" y "β" son raíces de la ecuación: $x^2-6x+c=0$, entonces el valor de:

$$M = \frac{\alpha^2 + \beta^2 + 2c}{9}$$ es igual a:

11. Sea la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$. Si una raíz es el doble de la otra, la relación de los coeficientes debe ser :

12. Resuelve:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{x} = \frac{1}{a + b + x}$$

$a \neq -b$

Para reforzar

1. Resuelve:

$$7x = 15 - 2x^2$$

a) {3/2, 5} b) {-3/2, 5} c) {3/2, -5}
d) {-3, -5} e) {3, 5}

2. Resuelve y da una raíz de: $x^2 + 7x + 5 = 0$

a) $(-7 + \sqrt{48})/2$ b) $(-7 + \sqrt{29})/2$
c) $(7 - \sqrt{49})/2$
d) $-7 - \sqrt{49}$ e) $(-7 + \sqrt{29})/4$

3. En la siguiente ecuación:

$$3x^2 = 4x + 5$$

Indica la suma de raíces.

a) 4 b) -4 c) 5/3
d) -4/3 e) 4/3

4. En la siguiente ecuación:

$$2x^2 - 3x = 7$$

Indica el producto de raíces.

a) 7/2 b) 3/2 c) -7/2
d) -7/3 e) 3/7

5. En la siguiente ecuación: $3x^2 - 3x + 6 = 0$
Las raíces son x_1 y x_2. Halla $x_1^2 + x_2^2$.

a) 1 b) -2 c) -3
d) -1 e) 2

6. Resuelve: $4x^2 - 20x + 25 = 9n^2$, e indica una raíz.

a) $(3n + 5)/3$ b) $(5 - 3n)/3$
c) $(-3n - 5)/2$
d) $(5 - 3n)/3$ e) $(3n + 5)/2$

7. Si se tiene que x_1 y x_2 son raíces de:

$$3x^2 - 15x + 6 = 0$$

Halla el valor de $(1 + x_2)(1 + x_1) + 3$.

a) 15 b) 14 c) 13
d) 12 e) 11

8. Si x_1 y x_2 son raíces de: $5x(x - 6) = -7$
Halla el valor de $M = [(1 + x_1)(1 + x_2)]^{-1}$

a) 42/5 b) 1/5 c) 7/5
d) 5/7 e) 5/42

9. Halla "k" si la ecuación: $x^2 - (k + 3)x + 3k = 0$ tiene raíces iguales.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

10. Si la ecuación: $(k - 6)x^2 - (k + 3)x + (3k + 4) = 0$ tiene una sola solución, indica el valor de "k".

a) 5 b) 6 c) 9
d) 4 e) 7

11. En la ecuación: $5x^2 - (a + 3)x + 2 = 0$, la suma de raíces es 7/5. Indica el valor de "a".

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

12. Si la ecuación: $(2b - 7)x^2 - (2b + 1)x + 10b + 40 = 0$ tiene como producto de raíces a 6, halla "b".

a) 82 b) 7/2 c) 41
d) 6 e) 40