Triángulo Educativo

Álgebra

5° SECUNDARIA

DOMINIO Y RANGO DE UNA FUNCION

Dominio y Rango de una Función

Recordando que el dominio de una función "f" es el conjunto de las primeras componentes de los pares ordenados de la función.

Así:

$D_f = \{x \;\; A \,/ \;\; y$, tal que $(x; y) \;\; "f"\}$

También el rango de una función "f" es el conjunto de las segundas componentes de los pares ordenados de la función.

Así:

$D_f = \{y \;\; B \,/ \;\; y$; tal que $(x; y) \;\; "f"\}$

Ejemplo 1:

Sean los conjuntos: $A=\{1; 2; 3; 4; 5\}$ y $B = \{4; 9; 16\}$ entonces la relación:

$f = \{(2; 4), (3; 9), (4; 16)\}$ es una función

f: A □ B con Dominio: $Df = \{2; 3; 4\}$ y Rango $Rf = \{4; 9; 16\}$

Ejemplo 2:

Dada la función: $f_{(x)} = 2x^2 + x - 3$

donde x $\{-1; 2; 4\}$

halla el rango de la función.

Resolución:

Como x $\{-1; 2; 4\}$ □ $Df = \{-1; 2; 4\}$ ahora para cada "x" obtenemos su imagen $f_{(x)}$ o simplemente el rango de la función.

$x=-1$ □ $f_{(-1)} = 2(-1)^2 + (-1) - 3 = 2 - 1 - 3$ □ $f_{(-1)} = -2$

$x=2$ □ $f \;\; = 2(2)^2 + 2 - 3 = 8 + 2 - 3$ □ $f_{(2)} = 7$

$x = 4$ □ $f_{(4)} = 2(4)^2 + 4 - 3 = 32 + 4 - 3$ □ $f_{(4)} = 33$

Finalmente la imagen o rango de la función será:

$Rf = \{-2; 7; 33\}$

Dominio y rango de la función lineal

$y = f(x) = ax + b \,/\, a \;\; R \ni b \;\; R$

Ejemplo 1:

La función: $f_{(x)} = 2x - 5$; por ser lineal su dominio y rango será:

$Df = R$ y $Rf = R$

Ejemplo 2:

La función: $f_{(x)} = -\frac{1}{5} + \frac{x}{3}$; es lineal pues

$f_{(x)} = \left(\frac{1}{3}\right) x + \left(-\frac{1}{5}\right)$

Luego su dominio y rango será:

$Df = R$ y $Rf = R$

Dominio y rango de la función racional

$$y = f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$$

Ejemplo 1:

Halla el dominio de la función:

$$f_{(x)} = \frac{2x - 1}{4x - 8}$$

Resolución:

El dominio de la función se obtendrá así:
Df: x R - {4x - 8 = O}
Resolviendo la ecuación: x = 2

$$\therefore x \quad R - \{2\}$$

Observación: El dominio de la función:

$y = f_{(x)} = \dfrac{2x - 1}{4x - 8}$; lo podemos

encontrar de la siguiente manera:
para que y R el denominador nunca deberá ser nulo, entonces:

$$4x \neq 8$$
$$4x - 8 \neq 0$$

$$x \neq 2$$
$$\therefore \text{Df: } x \quad R - \{2\}$$

Ejemplo 2:

Halla el dominio de la siguiente función:

$$y = f_{(x)} = \frac{4x - 1}{x - 2} + \frac{6}{3x+9}$$

Resolución:

$$x \neq 2 \ni 3x \neq -9$$
$$x \neq 2 \ni x \neq -9$$

$$\therefore \text{Df: } x \quad R - \{-3; 2\}$$

Recuerda

Para hallar el rango de la función racional

$y = \dfrac{ax - b}{cx - d}$ se despeja "x" en función de "y".

Ejemplo:

Halla el rango de la función:

$$f_{(x)} = \frac{x + 4}{3x - 6}$$

Resolución:

Como: y = f(x); entonces: $y = \dfrac{x+4}{3x - 6}$

$$y(3x - 6) = x+4$$

Efectuando la multiplicación:

$$3xy - 6y = x+4$$

Despejando "x"

$$\underbrace{3yx - x}_{\text{Común: x}} = 6y+4$$

$$x(3y - 1) = 6y+4$$

$$x = \frac{6y+4}{3y - 1}$$

Como: x R □ 3y - 1 ≠ 0

$$3y \neq 1$$

$$y \neq \frac{1}{3}$$

Rango de la función será:

$$\text{Rf: } y \quad R - \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

MÉTODO PRÁCTICO

Sólo para hallar el rango de la función:

$$f(x) = \frac{x+4}{3x - 6}$$

Dividiendo los términos lineales del numerador y denominador; así:

$$\frac{}{3x} \qquad \left\{\frac{1}{3}\right\}$$

Ejercicios Resueltos

1. Halla el dominio y rango de la función.

$$f_{(x)} = \frac{10x - 1}{5x+1}$$

Resolución:

Cálculo del dominio:

$$5x+1 \neq 0 \;\square\; 5x \neq -1$$

$$x \neq -\frac{1}{5}$$

$$\text{Df: } x \quad R - \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

Cálculo del rango: (utilizando el método práctico)

$$Rf: y \quad R - \left\{\frac{10x}{5x}\right\}$$

$$y \quad R - \{2\}$$

> Dominio y rango de la función cuadrática :
> $y = f_{(x)} = ax^2+bx+c;\ a\neq 0$

- El dominio de la función está representado por todos los números reales, es decir: Df = R.
- Los valores de "y"; es decir, el rango de la función cuadrática se obtiene despejando "x" en función de "y".

2. Halla el dominio y rango de la función cuadrática:

$$f_{(x)} = 2x^2 + 3x + 2$$

Resolución:

Cálculo del dominio: x R
Cálculo del rango: $y = 2x^2+3x+2$
Formando una ecuación de segundo grado:

$$2x^2 + 3x + (2 - y) = 0$$

Usando la fórmula general para despejar "x" en función de "y".

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a\neq 0)$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\underbrace{\Delta = b^2 - 4ac}_{\text{Discriminante de la ecuación}}$$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(2)(2 - y)}}{2(2)}$$

Para que "x R" lo que está dentro de la raíz cuadrada o sea la descriminante (Δ) deberá ser una cantidad no negativa, es decir:

$$\Delta = 9 - 4(2)(2 - y) \geq 0$$

Resolviendo:

$$9 - 8(2 - y) \geq 0$$
$$9 - 16 + 8y \geq 0$$
$$-7 + 8y \geq 0$$
$$8y \geq 7$$
$$y \geq \frac{7}{8}$$
$$Rf = [\frac{7}{8} ; + \infty>$$

3. Calcula el rango de la función cuadrática.

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 1;\ x \quad R$$

Resolución:

Como $y = f_{(x)}$, entonces:
$y = 3x^2 - 5x + 1$; la ecuación de segundo grado será:

$$3x^2-5x+(1-y)=0$$

Así como el problema anterior para encontrar el rango de la función resolveremos:

$$\underbrace{\Delta = b^2 - 4ac}_{\text{Discriminante de la ecuación de 2º. grado}} \geq 0$$

$$a = 3;\ b = -5 \text{ y } c = 1 - y$$
$$(-5)^2 - 4(3)(1- y) \geq 0$$
$$25 - 12(1- y) \geq 0$$

Despejando "y":

$$25 - 12+12\ y \geq 0$$
$$13 + 12y \geq 0$$
$$12y \geq -13$$
$$y \geq -\frac{13}{12}$$
$$Rf = [-\frac{13}{12} ; + \infty>$$

> Dominio y rango de la función raíz cuadrada:
> $y = \sqrt{f_{(x)}}$

- Al resolver la inecuación $f(x) \geq 0$ obtendremos el dominio de la función.
- El rango de la función se obtiene construyendo la función apartir del dominio de la función.

4. Halla el dominio y rango de la función:

$$f(x) = \sqrt{x - 5}$$

Resolución:

Cálculo del dominio: $x - 5 \geq 0$
$x \geq 5$

$$Df = [5 ; + \infty>$$

Cálculo del rango:
Construyendo la función $y = f_{(x)} = \sqrt{x - 5}$ partiendo del dominio.

Dominio: $\sqrt{x} \geq 5$
Resto 5: $x - 5 \geq 5 - 5$
$x - 5 \geq 0$

Extraemos: $\sqrt{x-5} \geq \sqrt{0}$

como: $y = \sqrt{x-5}$

$\square \quad y \geq 0$

Rf = [0 ; + ∞>

5. Halla el rango de la función:

$$f_{(x)} = \sqrt{x-2} - 6$$

Resolución:

Cálculo del dominio: $x+2 \geq 0$

$x \geq -2$

Df = [-2; + ∞>

Cálculo del rango:

Dominio: $x \geq -2$

$x+2 \geq 0$

Extraemos $\sqrt{\ }$: $\sqrt{x+2} \geq \sqrt{0}$

restando 6: $\sqrt{x+2} - 6 \geq 0 - 6$

como: $y = \sqrt{x+2} - 6$

luego: $y \geq -6$

∴ Rf = [- 6 ; + ∞>

6. Calcula el dominio de la función:

$$f_{(x)} = \sqrt{x+4} + \sqrt[4]{6-x}$$

Indica el número de elementos enteros.

Resolución:

Cuando el radical es de índice par lo que está dentro de la raíz debe ser una cantidad no negativa, es decir:

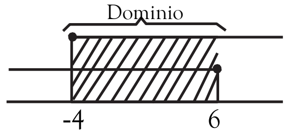
$$x + 4 \geq 0 \ \ni \ 6 - x \geq 0$$

Resolviendo las inecuaciones:

$x \geq -4 \ \ni \ 6 \geq x$

$x \geq -4 \ \ni \ x \leq 6$

Graficando:



x [-4; 6]

Los valores enteros son:

-4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4; 5; 6

∴ #elementos = 11

7. Calcula el dominio y rango de la función:

$$f_{(x)} = \sqrt{-x^2 + 10x - 21}$$

Resolución:

Cálculo del dominio:

$-x^2 + 10x - 21 \geq 0$

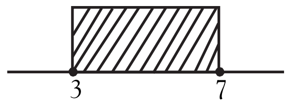
Multiplicando por (-1):

$x^2 - 10x + 21 \leq 0$

$x \qquad -7$

$x \qquad -3$

$(x-3)(x-7) \leq 0$



Df: $3 \leq x \leq 7$ ó [3; 7]

Cálculo del rango:

$$f_{(x)} = \sqrt{-x^2 + 10x - 21}$$

completando cuadrados:

$$f_{(x)} = \sqrt{-x^2 + 10x - 25 + 4}$$

$$-x^2 + 10x - 25 = -(x^2 - 10x + 25)$$

$$= -(x-5)^2$$

Luego:

$$f_{(x)} = \sqrt{-(x-5)^2+4}$$

Recordemos que para hallar el rango de la función debemos partir del dominio para construir la función $f_{(x)}$.

$$Df: 3 \leq x \leq 7$$

Restando 5: $3-5 \leq x-5 \leq 7-5$ □ $-2 \leq x-5 \leq 2$

Al cuadrado: $0 \leq (x-5)^2 \leq 2^2$ □ $0 \leq (x-5)^2 \leq 4$

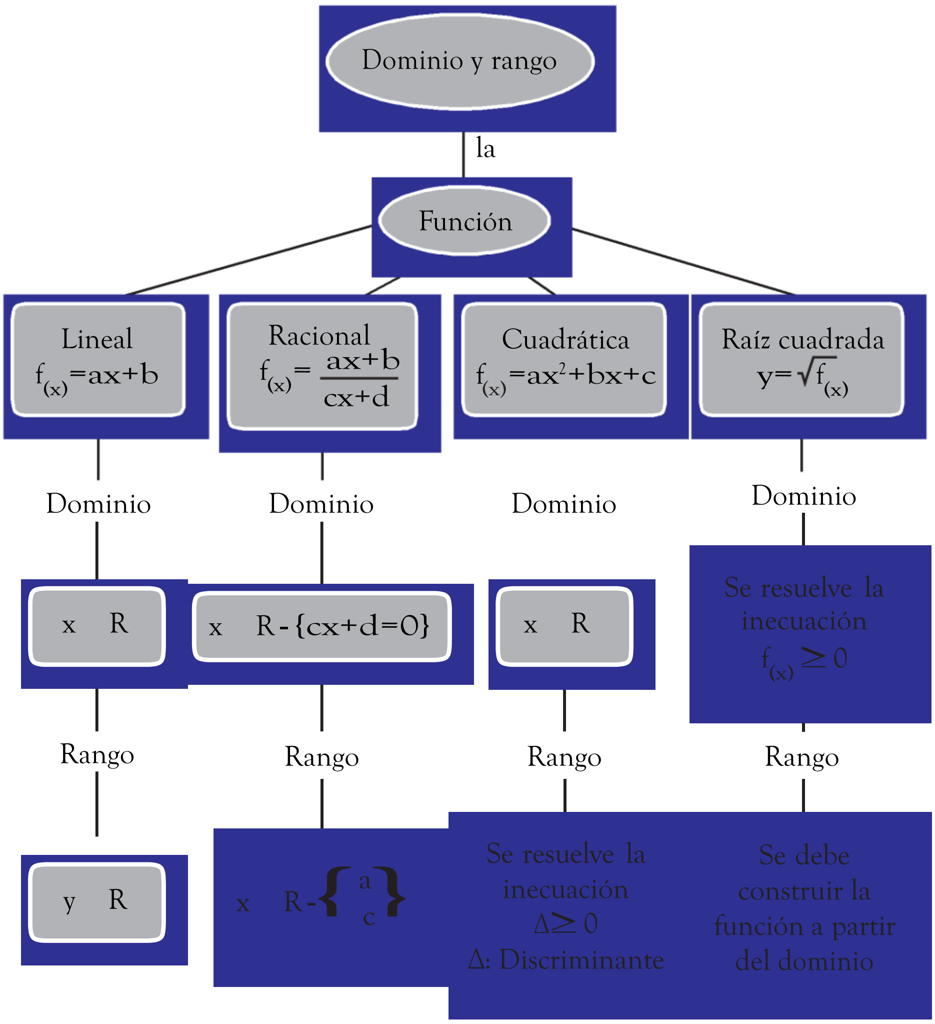
Multiplicando por -1: $-4 \leq -(x-5)^2 \leq 0$

Sumando 4: $-4+4 \leq -(x-5)^2 \leq 0+4$ □ $0 \leq -(x-5)^2+4 \leq 4$

Extraemos: $\sqrt{0} \leq \sqrt{-(x-5)^2+4} \leq \sqrt{4}$

Como: $y = f(x) = \sqrt{-(x-5)^2+4}$, entonces: $0 \leq y \leq 2$

$$\therefore Rf = [0;\ 2]$$



Resolviendo en clase

1 Si la relación:

$R = \{(1; 2a), (2; 7), (5; 1), (1;3a-5), (7; 9)\}$

es una función, la suma de elementos del rango de dicha función es:

Resolución:

Rpta:

2 Señala la suma de los elementos del rango de la función:

$f_{(x)}=2x+3$; siendo $x =\{0; 1; 2; 3\}$

Resolución:

Rpta:

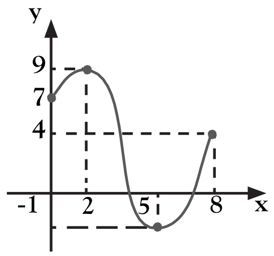
3 Halla el dominio de la función:

$$f_{(x)}= \sqrt{x^2 - 7x + 12}$$

Resolución:

Rpta:

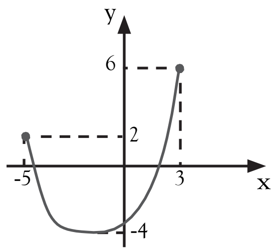
4 Halla el rango de la siguiente función:



Resolución:

Rpta:

5 **Halla el dominio y rango de la función:**



Resolución**:**

Rpta:

6 **Halla el rango de la siguiente función:**

$$h_{(x)} = 4x^2 + 12x + 7$$

Resolución**:**

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Determina el dominio de la función:

$$f_{(x)} = \frac{x + 3}{x - 2}$$

8. Halla el dominio de la función:

$$f_{(x)} = \frac{6x+1}{2 - 3x}$$

9. Halla el dominio de la función:

$$f_{(x)} = x^2 - 4 - x + 1$$

10. Determina el dominio de la función:

$$f_{(x)} = \sqrt{x - 2} + \sqrt{8 - x}$$

11. Halla el rango de la función:

$$f_{(x)} = \frac{6x+1}{2 - 3x}$$

12. Halla el dominio de:

$$f_{(x)} = \frac{5x - 2}{x^2 - 5x + 6}$$

Para reforzar

1. Señala la suma de los elementos del rango de la función:

$f_{(x)}=x^2-1$; siendo $x=\{-2;-1;1;2\}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

2. Si la relación:

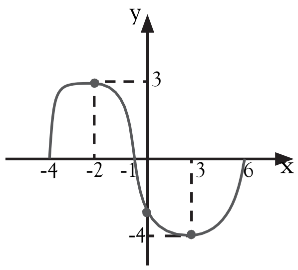
$\{(5,\ 2b+1);\ (b+1,4);(b-1,\ 3);\ (5,7)\}$

es una función; señala los elementos del dominio.

a) {3, 4, 5} b) {4, 5, 6} c) {2, 4, 5}
d) {5, 6, 7} e) {2, 5}

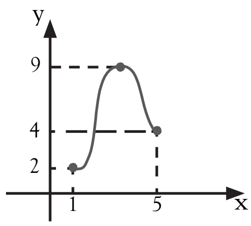
3. Halla el rango de la función:

a) [-4; -3]
b) [-4; 6]
c) [-4; 3]
d) [-2; 6]
e) <-∞; ∞>



4. Halla el dominio de la siguiente función:

a) [1; 5]
b) [1; 2]
c) [2; 4]
d) [2; 9]
e) [4; 9]



5. Determina el rango de la función:

$$f_{(x)}=\frac{10x-1}{2x-4}$$

a) R b) R - {5} c) R - {1/5}
d) R - {2} e) R - {-2}

6. Indica el dominio de la función:

$$f_{(x)}=\frac{x}{x^2-1}$$

a) R - {1} b) R - {-1} c) R-{-1; 1}
d) R - {10} e) R

7. Halla el dominio de la función:

$$f_{(x)}=\frac{\sqrt{x-3}}{x-6}$$

a) [3;+∞>-{6}
b) [6;+∞>-{3} e) R
c) [-3;+∞>-{6}
d) [3;+∞>
e) R

8. Halla el rango de la siguiente función:

$$g_{(x)}=x^2+8x+19$$

a) [3; ∞> b) [4; ∞> c) [-4; ∞>
d) <-∞; 3> e) <-∞; 5]

9. Halla el dominio de la siguiente función:

$$f_{(x)}=4x^2-x+3$$

a) R^+ b) R- {3} c) R
d) <-3; ∞> e) <3;∞>

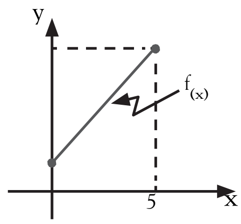
10. Calcula el número de valores enteros del dominio:

$$f_{(x)}=\sqrt{2002-x}+\sqrt{x-2002}$$

a) 2 002 b) 4 004 c) 0
d) 1 e) 1 000

11. Halla el rango de la siguiente función:

$f(x)=3x+1$



12. Halla el dominio:

$$f_{(x)}=\frac{3x-2}{x^3+x^2-20x}$$

a) {0; 4; 5} b) R - {0; 4; 5} c) R
d) R- {0; 4; -5} e) R^+