Triángulo Educativo

Álgebra

5° SECUNDARIA

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ

DEFINICIÓN

El determinante viene a ser una función que aplicada a una matriz cuadrada lo transforma en un escalar. Usualmente el determinante de una matriz cuadrada A lo denotamos por $|A|$ o det(A).

DEFINICIÓN DEL DETERMINANTE PARA UNA:

1. MATRIZ DE ORDEN UNO

Se llama determinante de una matriz de primer orden, formada por el elemento a, al propio elemento a.

Ejemplo:

$$\text{Sea } A = (-4) \Rightarrow |A| = -4$$

2. MATRIZ DE ORDEN DOS

$$\text{Sea } A = (a_{ij})_2$$

$$\Rightarrow |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Ejemplo:

$$\text{Sea } M = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow |M| = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix}$$

$$= 3(7) - (5)(-4) = 41$$

3. MATRIZ DE ORDEN TRES

$$\text{Sea } B = (b_{ij})_3$$

$$B = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix}$$

$$= b_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{21}\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{31}\begin{vmatrix} b_{12} & b_{13} \\ b_{22} & b_{23} \end{vmatrix}$$

PROPIEDADES

Sean A y B matrices cuadradas del mismo orden:

1. $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$

2. $\det(AB) = \det(A)\ \det(B)$

3. $\det(A) = \det(A^t)$

4. Un determinante en el que los elementos de dos columnas (o filas) son respectivamente proporcionales, es igual a cero.

5. Cuando se permutan dos columnas (o filas) el determinante cambia de signo.

6. Un determinante en el cual todos los elementos de una fila o columna son ceros; es igual a cero.

7. Si se multiplican todos los elementos de una fila (o columna) del determinante por un escalar, el mismo determinante queda multiplicado por dicho escalar.

8. El determinante no varía si a todos los elementos de una fila (o columna) se le añade el múltiplo de otra fila (o columna).

9. Si a todos los elementos del determinante se le multiplica por un escalar a, el determinante de la matriz queda multiplicado por a^n donde n es el orden de la matriz.

EJERCICIOS RESUELTOS

1. Calcula $|A| = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 8 & 8 & 6 & 4 & 2 \\ 9 & 9 & 9 & 6 & 3 \\ 8 & 8 & 8 & 8 & 4 \\ 5 & 5 & 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

Resolución:

Efectuando las siguientes transformaciones: $c_1 - c_2$; $c_2 - c_3$; $c_3 - c_4$ y $c_4 - c_5$, se obtiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \,.\, 4 \,.\, 5$$

$$|A| = 5! = \boxed{120}$$

2. Calcula $|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$

Resolución:

Sumando todas las columnas en la primera y luego, sacando factor común, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & 3 & 4 & 1 \\ 10 & 4 & 1 & 2 \\ 10 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$$

Restando la primera fila de las demás y luego $f_3 - 2f_2$ y $f_4 + f_2$, resulta:

$$|A| = 10 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \,.\, \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A| = 10 \,.\, 1 \,.\, 1 \,.\, (-4)(-4)$$

¥ $|A| = \boxed{160}$

3. Halla $|A| = \begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$

Resolución:

Sumando todas las filas a la primera y luego sacando factor común de ésta, se tiene:

$$|A| = \begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

$$= (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$$

Restando la primera columna de las otras:

$$|A| = (a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2b & -a-b-c & 0 \\ 2c & 0 & -a-b-c \end{vmatrix}$$

Luego:

$$|A| = (a+b+c)(-a-b-c)(-a-b-c)$$

$$|A| = \boxed{(a + b + c)^3}$$

4. Halla "x".

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x & 0 & 0 & c \end{vmatrix} = 0$$

Resolución:

Efectuando $f_4 - cf_1$, se tiene:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & 0 & 0 \\ x & 0 & b & 0 \\ x-c & -c & -c & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\begin{vmatrix} x & a & 0 \\ x & 0 & b \\ x-c & -c & -c \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando por la regla de Sarrus:

$$ab(x - c) + bcx + acx = 0$$

Luego:

$$\boxed{x = \frac{abc}{ab + bc + ac}}$$

Resolviendo en clase

1 Hallar el determinante de la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Resolución:

Rpta:

2 Si:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0$$

Calcular:

$$\begin{vmatrix} a+b & b \\ c+d & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & a+b \\ c & c+d \end{vmatrix}$$

Resolución:

Rpta:

3 Si "A" es de orden 4 y $|A| = 2$. Calcular el valor de $|2A|$.

Resolución:

Rpta:

4 Calcular el determinante:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 5 & 7 & 10 \\ 25 & 49 & 100 \end{vmatrix}$$

Resolución:

Rpta:

5 **Si:**

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & -1 \\ -3 & x & -6 \\ 1 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 425$$

Obtener "x + 1".

Resolución:

Rpta:

6 **Si:**

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} . X = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Calcular: $|X|$

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Resolver:

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6$$

8. Calcular "x" si se cumple lo siguiente:

$$\begin{vmatrix} \operatorname{sen} x & \cos x \\ \operatorname{sen} y & \cos y \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \ ; \ x + y = \frac{\pi}{3}$$

9. Hallar la solución de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & x \\ x & x+2 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

10. Resolver:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & x & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 2$$

11. Hallar:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 & 5 & -1 \\ 8 & -2 & 8 & 2 \\ 6 & 3 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

12. Hallar los valores de "k" para los cuales:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 7 \\ k & k+2 & k-2 \\ 4 & k & 8 \end{vmatrix} = 0$$

Para reforzar

1. Calcular:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}$$

a) $a^3 + b^3 + c^3$

b) $a^3bc + b^3ca + c^3ab$

c) $a^2 + b^2 + c^2$

d) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

e) $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc$

2. Hallar el valor de "x":

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

a) 1 b) 2 c) 3

d) – 1 e) – 2

3. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 35 & 37 & 34 \\ 23 & 26 & 25 \end{vmatrix}$$

a) 8 b) 6 c) 7

d) – 14 e) – 16

4. Calcular el valor de:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 8 \end{vmatrix}$$

a) - 2 b) 6 c) 15

d) 12 e) 30

5. A que es igual:

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

a) (b – c) (c – a) (a – b)
b) abc (a + b + c)
c) $a^2 + b^2 + c^2$
d) ab + ac + bc
e) abc (ab + ac + bc)

6. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & z & -y \\ -z & 1 & x \\ y & -x & 1 \end{vmatrix}$$

a) x + y + z
b) –(x + y + z)
c) $x^2 + y^2 + z^2 + 1$
d) $x^2 + y^2 + z^2$
e) $x^2 + y^2 + z^2 - 1$

7. Resolver:

$$\begin{vmatrix} 15-2x & 11 & 10 \\ 11-3x & 17 & 16 \\ 7-x & 14 & 13 \end{vmatrix} = 0$$

a) 5 b) 3 c) 4
d) 6 e) 2

8. Calcular el valor de la determinante:

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix}$$

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3
e) 4

9. Calcular:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+m & 1 \\ 1 & 1 & 1+m \end{vmatrix}$$

a) m b) n c) m+n
d) m–n e) m·n

10. Calcular:

$$Q = \sqrt{\begin{vmatrix} m+n & 2n \\ 2m & m+n \end{vmatrix}} - \sqrt{\begin{vmatrix} m-n & -2n \\ 2m & m-n \end{vmatrix}}$$

a) m b) n c) m+n
d) m – n e) 2m

11. Si "x" cumple la igualdad:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ x & -1 & 1 \\ 1 & x & 2 \end{vmatrix} = (x-2)^2$$

halle "y" de la siguiente igualdad:

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 2 & 1 & x \\ x & 2 & \end{vmatrix} = xy$$

a) 1 b) 0 c) –1
d) –2 e) –3

12. Calcular:

$$|B| = \begin{vmatrix} 1 & x & x & x & x \\ 0 & 2 & x & x & x \\ 0 & 0 & 3 & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 4 & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$$

a) 120 b) 110 c) 100 d) 90
e) 80