

Aritmética

CUATRO OPERACIONES I ADICION Y SUSTRACCION

Definición

Es la operación aritmética (+) que permite reunir 2 o más cantidades homogéneas (sumandos) en una sola (suma).

Notación:

$$\underbrace{a_u + b_u + c_u}_{\text{sumandos}} = S_u \quad \downarrow \text{suma}$$

AXIOMAS DE LA ADICIÓN

Si $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. ASOCIATIVA:

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

2. CLAUSURA

Si $a, b \in \mathbb{R}$; entonces: $a + b \in \mathbb{R}$

3. CONMUTATIVA:

$$a + b = b + a$$

4. INVERSO ADITIVO:

Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $(-a) \in \mathbb{R}$ y se llama inverso aditivo.

5. MODULATIVA:

Existe un elemento 0 (cero), tal que si $a \in \mathbb{R}$, luego $0 + a = a + 0 = a$

y 0 se llama elemento neutro aditivo o módulo de la adición.

6. CANCELATIVA:

Si $a + c = b + c$, entonces $a = b$.

Corolario (uniformidad)

Si $a = b$ y $c = d$, entonces: $a + c = b + d$

Series Básicas

1. SUMA DE PRODUCTOS CONSECUTIVOS

$$S = 1.2 + 2.3 + 3.4 + \dots + n(n+1)$$

$$S = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$P = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2)$$

$$P = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Ejemplo 1:

Calcula: $E = 2 + 6 + 12 + 20 + \dots + 600$

Resolución

$$E = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + 24.25$$

$$E = \frac{24.25.26}{3} = \boxed{5200}$$

2. SUMA DE POTENCIAS SUCEVAS:

$$a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a(a^n - 1)}{a - 1}$$

Ejemplo 2:

Calcula: $A = 5 + 5^2 + 5^3 + \dots + 5^{100}$

Resolución

$$A = \frac{5(5^{100} - 1)}{5 - 1} = \boxed{\frac{5^{101} - 5}{4}}$$

3. SUMA DE NÚMEROS TRIANGULARES:

$$M = 1+3+6+10 + \dots + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$M=1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+\dots+n)$$

$$M = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Ejemplo 3:

Calcula :

$$M = 1+3+6+10+\dots+210$$

Resolución

$$M=1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+20)$$

$$M= \frac{20 \cdot 21 \cdot 22}{6} = \boxed{1540}$$

4. SUMA DE LOS CUADRADOS DE LOS "n" PRIMEROS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Ejemplo 4:

$$Q = 1^2+2^2+3^2+\dots+20^2$$

Resolución

$$Q= \frac{(20)(21)(41)}{6} = \boxed{2870}$$

5. SUMA DE LOS CUBOS DE LOS "n" PRIMEROS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3= \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

Ejemplo 5:

Calcula:

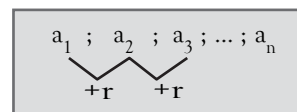
$$P = 1^3+2^3+3^3+\dots+9^3$$

Resolución

$$P= \left[\frac{9(10)}{2} \right]^2 = 45^2$$

$$\boxed{2025}$$

6. SUMA DE LOS "n" TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA



$$S = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$$

$$S = \frac{(a_1 + a_n) \cdot n}{2}$$

También:

$$S = \frac{[2a_1 + (n-1)r] \cdot n}{2}$$

Nota

«n» es la cantidad de sumandos en cada suma.

Ejemplo 6:

Calcula:

$$S = 4+7+10+\dots+91$$

Resolución

$$S = \frac{(4+91)n}{2}$$

$$\text{pero: } n = \frac{91-4}{3} + 1$$

$$n = 30$$

$$\therefore S = \frac{(4+91)30}{2}$$

$$S = \boxed{1425}$$

Ejemplo 7:

Calcula:

$$A = \underbrace{5 + 7 + 9 + 11 + \dots}_{20 \text{ sumandos}}$$

Resolución

$$A = \frac{[2(5) + (20-1)(2)] \cdot (20)}{2}$$

$$A = \boxed{480}$$

SUSTRACCIÓN

Propiedades

Complemento Aritmético



OBJETIVO

Reconocer los términos de una sustracción y sus propiedades.
Efectuar cálculos del complemento de un número.

Definición

Es la operación inversa a la Adición, que consiste en que dados dos números enteros llamados Minuendo y Sustraendo se debe encontrar un tercer número llamado Diferencia.

Se representa mediante el operador: «-».

Términos :

$$M - S = D$$

M : Minuendo
S : Sustraendo
D : Diferencia

Propiedades

1. $M = S + D$

«En una sustracción la suma del Sustraendo y la Diferencia es igual al Minuendo».

Ejemplo:

$$8 - (-3) = 11$$

$$M = 8, S = 3, D = 11$$

$$S + D = M \\ -3 + 11 = 8$$

$$8 = 8$$

2. $M + S + D = 2M$

«La suma de los 3 términos de una sustracción es igual al doble del minuendo».

Ejemplo:

$$12 - 5 = 7$$

$$M = 12, S = 5, D = 7$$

$$M + S + D = 2M \\ 12 + 5 + 7 = 2(12)$$

$$24 = 24$$

$$3. \text{ si } \overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$$

$$x + z = 9 \wedge y = 9$$

Ejemplo:

Si $\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{3xy}$,
calcula $x - y$.

Resolución

Por propiedad $x = 9$

$$3 + y = 9 \rightarrow y = 6$$

$$\therefore x - y = 3$$

4. EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

$$\overline{abc}_{(n)} - \overline{cba}_{(n)} = \overline{xyz}_{(n)}$$

$$\text{donde : } \begin{aligned} y &= n - 1 \\ x + z &= n - 1 \end{aligned}$$

Ejemplo:

Si $\overline{abc}_{(9)} - \overline{cba}_{(9)} = \overline{mn}4_{(9)}$,
calcula $m \cdot n$.

Resolución

Escribimos:

$$\overline{abc}_{(9)} - \overline{cba}_{(9)} = \overline{mn}4_{(9)}$$

Por propiedad:

$$\begin{aligned} n &= 8 \\ m + 4 &= 8 \rightarrow m = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore m \cdot n = 32$$

Complemento Aritmético (CA)

Se define al complemento aritmético de un número como la cantidad de unidades que le falta para ser igual a una unidad del orden inmediato superior.

Ejemplos:

$$CA(8) = 10 - 8 = 2$$

$$CA(23) = 100 - 23 = 77$$

$$CA(381) = 1000 - 381 = 619$$

$$CA(\overline{abc}) = 1000 - \overline{abc}$$

$$CA(\overline{mnpq}) = 10000 - \overline{mnpq}$$

En general, si N tiene k cifras entonces:

$$CA(N) = \underbrace{1,00\dots0}_k - N$$

Método práctico para calcular el complemento aritmético

A. SI EL NÚMERO NO TERMINA EN CERO

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} (9) & (10) \\ \hline \text{CA}(9 & 2 & 3 & 5 & 7) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & 7 & 6 & 4 & 3 \end{array} \\
 \hline
 \therefore \text{CA}(92357) = 7643
 \end{array}$$

B. SI EL NÚMERO TERMINA EN CERO

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} (9) & (10) \\ \hline \text{CA}(3 & 5 & 0 & 2 & 7 & 0 & 0) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 6 & 4 & 9 & 7 & 3 & 0 & 0 \end{array} \\
 \hline
 \therefore \text{CA}(3502700) = 6497300
 \end{array}$$

Ejemplo 1:

Calcula $\text{CA}(60027) + \text{CA}(19900)$.

Resolución

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} (9) & (10) \\ \hline \text{CA}(6 & 0 & 0 & 2 & 7) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 3 & 9 & 9 & 7 & 3 \end{array} \\
 \hline
 \text{CA}(60027) = 39973 \\
 \\
 \begin{array}{cc} (9) & (10) \\ \hline \text{CA}(1 & 9 & 9 & 0 & 0) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 8 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \\
 \hline
 \text{CA}(19900) = 80100 \\
 \\
 \therefore 39973 + 80100 = 120073
 \end{array}$$

Ejemplo 2:

Si $\text{CA}(\overline{a8b}) = \overline{1x4}$
calcula $a + b + x$.

Resolución

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} (9) & (10) \\ \hline \text{CA}(\overline{a} & 8 & \overline{b}) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & x & 4 \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{l} \Rightarrow 9 - a = 1 \rightarrow a = 8 \\ \Rightarrow 9 - 8 = x \rightarrow x = 1 \\ \Rightarrow 10 - b = 4 \rightarrow b = 6 \end{array} \\
 \\
 \therefore a + b + x = 15
 \end{array}$$

Ejemplo 3:

Si $\text{CA}(\overline{a(2b)3}) = \overline{bc}$,
calcula $a + b + c$.

Resolución

$$\begin{array}{r}
 \begin{array}{cc} (9) & (10) \\ \hline \text{CA}(\overline{a} & (2\overline{b}) & 3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 0 & b & c \end{array}
 \end{array}$$

$$\Rightarrow 9 - a = 0 \rightarrow a = 9$$

$$\Rightarrow 9 - 2b = b \rightarrow 3b = 9 \rightarrow b = 3$$

$$\Rightarrow 10 - 3 = c \rightarrow c = 7$$

$$\therefore a + b + c = 19$$

Ejercicios Resueltos

Ejemplo 1:

¿Cuánto se obtiene si se suman todos los números de dos cifras cuya suma de sus dígitos es 9?

- a) 468 b) 496 c) 396 d) 486 e) 864

Resolución

* Sean los números de la forma: $\overline{ab}$

* Donde: $a + b = 9$

$$\begin{array}{r}
 \downarrow \quad \downarrow \\
 9 \quad 0 \\
 8 \quad 1 \\
 7 \quad 2 \\
 \vdots \quad \vdots \\
 1 \quad 8
 \end{array}$$

* La suma es:

$$\begin{array}{r}
 90 + \\
 81 \\
 72 \\
 \vdots \\
 18 \\
 \hline
 36 \leftarrow 0+1+2+\dots+8 = \frac{8 \times 9}{2} = 36 \\
 45 \leftarrow 9+8+7+\dots+1 = \frac{9 \times 10}{2} = 45 \\
 \hline
 486
 \end{array}$$

$$\therefore \text{Se obtiene: } 486$$

Clave D

Ejemplo 2:

Halla la suma de los valores que pueden tomar las letras en la siguiente suma:

$$\begin{array}{r} \overline{2r5} + \\ s38 \\ \hline \overline{543} \\ 90t \end{array}$$

- a) 12 b) 11 c) 10 d) 9 e) 8

Resolución

* En el 1.º orden:

$$5+8+3 = \overline{1}t \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{se lleva} \end{array}$$

$$t = 6$$

* En el 2.º orden:

$$\overline{1} + r + 3 + 4 = \overline{1}0 \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{llevo} \end{array}$$

$$r = 2$$

* En el 3.º orden:

$$\overline{1} + 2 + s + 5 = 9$$

$$s = 1$$

$$\therefore r+s+t = 2+1+6 = 9$$

Clave D**Ejemplo 3:**

La suma de los tres términos de una resta es 9876. Si el sustraendo excede a la diferencia en la tercera parte del minuendo, halla el sustraendo.

- a) 1646 b) 3292 c) 1664 d) 2392 e) 2496

Resolución

* Tenemos: $M - S = D$

* Dato: $M + S + D = 9876$ (1)

$$S - D = \frac{M}{3} \text{(2)}$$

* De (1) por propiedad se tiene:

$$\begin{aligned} M + \overbrace{S+D}^M &= 9876 \\ 2M &= 9876 \\ M &= 4938 \end{aligned}$$

* Reemplazando en (2)

$$\begin{aligned} S - D &= \frac{4938}{3} \\ S - D &= 1646 \quad \text{.....(3)} \end{aligned}$$

* Pero: $S + D = M = 4938$ (4)

$$\text{* De (3) y (4): } S = \frac{1646 + 4938}{2}$$

$$\therefore \text{ El sustraendo es: } S = 3292$$

Clave B**Ejemplo 4:**

Halla $a+b+c+d$ si a; b; c y d son dígitos en:

$$\begin{array}{r} \overline{15abc d} + \\ 487278 \\ \hline a b c d 15 \end{array}$$

- a) 12 b) 18 c) 20
d) 21 e) 25

Resolución

* En las unidades:

$$d+8 = \overline{1}5 \Rightarrow d=7 \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{llevamos} \end{array}$$

* En las decenas:

$$\overline{1} + c + 7 = \overline{1}1 \Rightarrow c=3 \quad \begin{array}{c} \downarrow \\ \text{se lleva} \end{array}$$

* En las centenas:

$$\begin{aligned} \overline{1} + b + 2 &= \overline{...}d \\ 1 + b + 2 &= ...7 \\ b &= 4 \end{aligned}$$

* En los millares:

$$\begin{aligned} a + 7 &= \overline{...}c \\ a + 7 &= 13 \Rightarrow a=6 \end{aligned}$$

$$\therefore a+b+c+d = 6+4+3+7 = 20$$

Clave C

Resolviendo en clase

1 Calcule el valor de:

$$abc_7 + cab_7 + bca_7$$

Si: $a + b + c = 13$. De como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

Rpta:

2 Calcule la siguiente suma:

$$35 + 48 + 63 + 80 + \dots + 1599$$

(UNI 2009-II)

Resolución:

Rpta:

3 Si:

$$abc - cba = mnp$$

Calcular $mnp + npm + pmn$, indicando la suma de cifras del resultado.

Resolución:

Rpta:

4 El doble de un número de tres cifras excede al triple de su complemento aritmético en 380. Hallar el número. (VILLARREAL 2011-II)

Resolución:

Rpta:

5 Si:

$$C.A.(2ab7) = c54d$$

Calcule "a + b + c + d".

Resolución:

6 Si la suma de los complementos aritméticos de los números xy ; yx es 79. (UNMSM 2012-I)

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. La suma:

$$a + \overline{aa} + \overline{aaa} + \overline{aaaa} + \dots + \underbrace{\overline{aaa\dots a}}_{87 \text{ cifras}}$$

Termina en la cifra 2. Las cuatro últimas cifras de la suma total son:

8. Una progresión aritmética esta formada del 4 al 55. La suma de los 6 primeros números es 69; de los 6 siguientes es 177 y la suma de los 6 últimos es 285. El segundo y el décimo tercero termino de la progresión será: (UNMSM 1994)

9. Calcular la suma de términos:

$$\underbrace{185 + 178 + 171 + \dots}_{15 \text{ terminos}}$$

10. Halle "k", si la suma de los términos de la siguiente progresión aritmética: k , k + 4 , k + 8 , ... , 5k ; es 3780.

11. Halle la suma de los términos de la siguiente sucesión:

$$\underbrace{\overline{a24}, \overline{a26}, \overline{a28}, \dots, \overline{a78}}_{2a \text{ términos}}$$

12. Si:

$$CA(\overline{ab}) + CA(\overline{aba}) = 912$$

El valor de "a - b" es:

Para reforzar

1. Calcule el valor de "m + n + p", si:

$$\overline{m1n} + \overline{m2n} + \overline{m3n} + \dots + \overline{m7n} = \overline{38p1}$$

- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9

2. Calcule "a.b.c", si:

$$\begin{array}{r} \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\ 8cbb + abc8 + caca + b7ac = 24b22 \end{array}$$

- a) 108 b) 96 c) 30
d) 60 e) 90

3. Calcule el valor de "a + b + c + d", si:

$$C.A.(\overline{3a7b}) = \overline{c5d2}$$

- a) 12 b) 14 c) 16
d) 18 e) 20

4. Calcule el valor de "x + z - y", si:

$$\overline{abc} - \overline{cba} = \overline{xyz}$$

- a) 0 b) 9 c) 5
d) 4 e) 3

5. Calcular la suma de todos los números de tres cifras que tengan todas sus cifras iguales.

- a) 4 995 b) 4500 c) 3 995
d) 9 275 e) 5 350

6. Calcular la suma de los términos de las 20 primera de:

$$\begin{array}{cccc} & & 1 & \\ & 3 & & 5 \\ & 7 & 9 & 11 \\ 13 & 15 & 17 & 19 \end{array}$$

- a) 44 100 b) 45 100 c) 30 000
d) 22 350 e) 32 555

7. Calcular el número de los primeros impares positivos que se deben sumar para obtener 2500.

- a) 25 b) 50 c) 75
d) 100 e) 150

8. Expresar en base 10:

$$12_{(4)} + 12_{(6)} + 12_{(8)} + 12_{(10)} + \dots + 12_{(80)}$$

- a) 1416 b) 1516 c) 1616
d) 1716 e) 1816

9. Calcular la suma de términos:

$$18 + 33 + 48 + \dots + 453$$

- a) 7032 b) 7144 c) 7206
d) 7093 e) 7065

10. Calcular la suma de términos:

$$\underbrace{39 + 45 + 51 + \dots}_{51 \text{ terminos}}$$

- a) 9527 b) 9639 c) 9642
d) 9641 e) 9556

11. Halle la suma de los términos de la siguiente progresión aritmética, sabiendo que tiene 102 términos:

$$\overline{aa1} ; \overline{aa5} ; \overline{aa9} ; \dots ; \overline{9aa}$$

- a) 76 806 b) 75 006 c) 76 900
d) 77 666 e) 78 312

12. Si se cumple:

$$C.A.(\overline{abc}) = 4[\overline{c(b-4)a}] + 4$$

Calcule "a + b + c".

- a) 9 b) 12 c) 8
d) 13 e) 10