CONTEO DE NUMEROS

1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo abordaremos conceptos y problemas que fueron tratados por grandes matemáticos hace miles de años, tal es el caso de lo registrado en el papiro RHIND, hallado por éste a fines del siglo XIX, que fue escrito unos 2000 años antes de nuestra era.

Entre los problemas aritméticos que figuraban en dicho papiro está el de "la repartición del pan", que lo plantearemos como un desafío más adelante.

Por otro lado, la naturaleza nos muestra que muchos fenómenos pueden ser analizados según su recurrencia, por ejemplo: el cometa Halley es visible desde la Tierra cada 76 años; así también en nuestra vida encontramos aplicaciones sencillas como:

Ejemplo inductivo:

Un médico recetó a Esmeralda tomar una pastilla cada 5 días a partir del 7 de marzo y durante dicho mes. Completa el siguiente esquema:

Nº de toma: 1.º 2ª 3ª ...
□ □ □
Día: : 7 ... ...

Además:

I. La tercera toma fue el día ______de marzo.

II. La última toma fue el día ______de marzo y fue la ______toma.

III. La diferencia de días entre dos tomas consecutivas es ______días.

De este ejemplo se observa que:

i. El conjunto: 7, 12, 17, 22, 27 es un conjunto ordenado, donde a cada elemento llamaremos **término**.

ii. Cada término tiene un **orden** designado o **número ordinal,** el cual guarda una correspondencia con su respectivo término. Del ejemplo:
primer término: $t_1 = 7 = \mathbf{1} \times 5 + 2$
segundo término: $t_2 = 12 = \mathbf{2} \times 5 + 2$
tercer término: $t_3 = 17 = \mathbf{3} \times 5 + 2$
cuarto término: $t_4 = 22 = \mathbf{4} \times 5 + 2$
quinto término: $t_5 = 27 = \mathbf{5} \times 5 + 2$

iii. La característica fundamental de este tipo de conjuntos es que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera es siempre un valor constante que llamaremos **razón aritmética** (r). Del ejemplo:

$$\underbrace{7}_{t_1} \quad \underbrace{12}_{t_2} \quad \underbrace{17}_{t_3} \quad \underbrace{22}_{t_4} \quad \underbrace{27}_{t_5}$$

$$+5 \quad +5 \quad +5 \quad +5$$

→ **razón aritmética: r = +5**

"A un conjunto con esta característica lo llamaremos **progresión aritmética**".

2. DEFINICIÓN

Una progresión aritmética es un conjunto de números ordenados, de tal manera que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera (el de mayor orden menos el otro) es siempre una constante llamada valor de la razón aritmética (r).

Ejemplo:

N.º ordinal: 1.º 2.º 3.º 4.º ... n.º
□ □ □ □ □
Término : 5 8 11 14 ... 3n+2

+3 +3 +3

razón aritmética: r = +3

Según el signo del valor de la razón aritmética, las progresiones aritméticas pueden ser:

2.1. Progresión aritmética creciente

Cuando la razón es positiva ($r > 0$).

6 , 13 , 20 , 27 , 34 , ...

+7 +7 +7 +7

razón: r = +7

2.2. Progresión aritmética decreciente

Cuando la razón es negativa ($r < 0$).

20 , 14 , 8 , 2 , -4 , ...

- 6 - 6 - 6 - 6

razón: r = - 6

3. CÁLCULO DE UN TÉRMINO DE LA P.A. CUYO LUGAR ES "n":

Se recomienda establecer una correspondencia entre cada término y su respectivo número ordinal.

Ejemplo inductivo:

Dada la P.A. : 6, 10, 14, 18, ...

Halla:

i. El término de enésimo lugar (t_n).
ii. El término de vigésimo lugar (t_{20}).

Resolución

N.º ordinal:	1.º	2.º	3.º	4.º	...	n.º
	□	□	□	□		□
Término :	6 ,	10 ,	14 ,	18 ,	...	t_n
	+4	+4	+4		...	

i. Cada término se deberá expresar en función de su número ordinal y la razón.

$t_1 = 6$
$t_2 = 6 + 1(4)$
$t_3 = 6 + 2(4)$
$t_4 = 6 + 3(4)$

. .

$t_{10} = 6 + 9(4)$

. .

$t_n = 6 + (n - 1)(4)$

$\boxed{t_n = 4n + 2}$

ii. A partir de "t_n" hallaremos "t_{20}", para lo cual n = 20 (lugar 20).

$\boxed{t_{20} = 4(20) + 2 = 82}$

Ejemplo:

Dada la siguiente progresión artimética, halla el término enésimo (t_n).

N.º ordinal	: 1.º	2.º	3.º	4.º ...	n.º
	□	□	□	□	□
	7 ,	4 ,	1 ,	-2 ...	t_n
	-3	-3	-3		

razón: r = –3

Luego:

$t_1 = 7$
$t_2 = 7 - 1(3)$
$t_3 = 7 - 2(3)$
$t_4 = 7 - 3(3)$
:
:

$t_n = 7 - 3(n - 1)$

4 $t_n = 10 - 3n$

En general:
Dada una progresión aritmética, el término de enésimo lugar (t_n) se calcula:

$$\boxed{t_n = t_1 + (n - 1) \cdot r}$$

Ejemplo:

Halla el término de enésimo lugar para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

i. 57, 64, 71, 78, ...
ii. 29, 18, 7, -4, ...
iii. 1, 7, 13, 19, ...

Ejemplo:

Calcula los cuatro primeros términos para cada una de las tres P.A., si sus respectivos términos de enésimo lugar se expresan así:

i. $t_n = 120 + 9n$
ii. $t_n = 13 - 8n$
iii. $t_n = -20 + 6n$

4. CÁLCULO DEL NÚMERO DE TÉRMINOS DE UNA P. A.

PROBLEMA GENERAL

Dada la siguiente progresión aritmética finita, calcula el número de términos (n).

$$\overbrace{t_1 \;,\; t_2 \;,\; t_3 \;,\; t_4 \;,\; \ldots \;,\; t_n}^{\text{"n" términos}}$$

r r r

Sabemos : $\mathbf{t_n = t_1 + (n - 1) \cdot r}$

Despejando "n", tenemos: $\boxed{\mathbf{n = \dfrac{t_n - t_1}{r} + 1}}$

Observa que para calcular el número de términos "n", necesitas:

r : razón aritmética
$\mathbf{t_n}$: último término
$\mathbf{t_1}$: primer término

$$\boxed{\textbf{\# términos} = \frac{\textbf{último - primero}}{\textbf{razón}} + 1}$$

* **Aplicación:**
¿Cuántos términos tiene la siguiente P.A.?

20, 31, 42, 53, ... , 669

Resolución

Nos piden el número de términos (n) para lo cual necesitamos:

$\mathbf{r = 31 - 20 = 11}$
$\mathbf{t_1 = 20}$
$\mathbf{t_n = 669}$

$$\mathbf{n = \frac{669 - 20}{11} + 1 = \frac{649}{11} + 1 = 60}$$

4 La P.A. tiene 60 términos.

Ejercicios:

Calcula la cantidad de términos de cada una de las siguientes P.A.:

i. 45, 53, 61, 69, ... , 437
ii. 58, 46, 34, ... , -350
iii. 36, 37, 38, ... , 570
iv. $\overline{11a}, \overline{12a}, \overline{13a}, \ldots, \overline{63a}$

5. CÁLCULO DE LA CANTIDAD DE CIFRAS AL ESCRIBIR LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA FINITA

Ejemplo inductivo:

Calcula cuántas cifras se utilizarán al escribir los enteros consecutivos desde 56 hasta 499.

Resolución

Observa que del 56 hasta el 499 todos los números no tienen la misma cantidad de cifras, por lo que nos conviene formar grupos de números que tengan igual número de dígitos.

En este caso:

i. **Números de dos cifras:**
56, 57, 58, ... , 99

* Número de términos:
99 - 55 = 44 términos

* Cantidad de cifras:
44 × 2 = 88 cifras

cada término
tiene dos cifras

ii. Números de tres cifras:
100, 101, 102, ... , 499

* Número de términos:
499 - 99 = 400 términos
* Cantidad de cifras:
$400 \times \underbrace{3}_{\text{cada término tiene tres cifras}} = 1200$ cifras

Luego:

Cantidad total de cifras:
88 + 1200 = 1288 cifras

Ejercicios:

¿Cuántas cifras se utilizarán para escribir todos los términos de dos cifras de la siguiente P.A. 14, 18, 22, ... ?

Resolución

Para calcular el número de cifras totales debes averiguar cuántos términos de dos cifras tiene la P.A. de la siguiente forma:

1.º 2.º 3.º ... k.º

□ □ □ □

$$10 \xrightarrow{+4} 14 \xrightarrow{+4} 18 \xrightarrow{+4} 22 \ \dots \ \underbrace{(4k+10)}_{\text{el mayor término de dos cifras}}$$

Observa que el esquema indica que la P.A. tiene "k" términos de dos cifras por lo que:

$$\overbrace{4k + 10}^{\text{es máximo de dos cifras}} < 100$$

Evaluando: 22

Luego, hay 22 términos de dos cifras cada uno, entonces el número de cifras totales es 22 × 2 = 44 cifras.

6. NÚMEROS CONDICIONADOS

Son aquellos números cuyas cifras se caracterizan por cumplir determinadas condiciones.

No forman necesariamente una progresión aritmética y para contarlos utilizaremos el principio de multiplicación.

6.1 Principio de Multiplicación

Si un procedimiento o actividad, se puede efectuar de "m" maneras y otro de "n" maneras, y cada uno de los primeros puede ser seguido por cualquiera de los otros, entonces el número de maneras de realizar el primero seguido del segundo es "m x n".

Ejercicios:

¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar con las cifras 0; 3; 4; 7 y 9?

Resolución

Son números de la forma $\overline{ab}$.

i. La cifra **a**, por ser primera cifra, toma valores diferentes de cero: 3; 4; 7 ó 9. Los posibles valores de **a** son 4.

ii. La cifra **b** puede tomar los valores 0; 3; 4; 7 ó 9. Puede tomar 5 posibles valores.

Por lo tanto, el total de números de la forma $\overline{ab}$ es 4 × 5 = 20 números.

Nótese que no ha sido necesario escribir los 20 números, de los cuales algunos son 30; 33; 34; 37; 39; 40; 43; 44; 47; 49; etc. Estos números no forman una progresión aritmética.

Para contar la cantidad de números que poseen determinadas características en sus cifras, se procede del modo siguiente:

a) Se representa la forma general de numeral.
b) Se cuenta los valores que puede tomar cada cifra independiente del número.
c) Por el principio de multiplicación, se toma el producto de la cantidad de valores que toman las cifras independientes. Éste será el total de números condicionados.

Ejercicios:

¿Cuántos números de 3 cifras cumplen con que su cifra de centenas es el doble de su cifra de unidades?

Resolución

Representación general: $\overline{(2a)\,ba}$

Doble del valor de unidades

Contando:
Valores de a: 1; 2; 3; 4 ® 4 valores
Valores de b: 0;1;2;...;9 ® 10 valores

Total 4 × 10 = 40 números

Ejercicios:

¿Cuántos números impares de 3 cifras empiezan en cifra par menor que 6?

Resolución

Representación : $\overline{\mathbf{abc}}$

Valores de a : 2; 4 ® 2 valores
Valores de b: 0;1;2;...;9 ® 10 valores
Valores de c: 1;3;5;7;9 ® 5 valores

Total $2 \times 10 \times 5 = 100$ números

EJERCICIOS RESUELTOS

1. El tercer término de una sucesión es 12 y el décimo primer término es -12. Halla la diferencia común.

a) -3 b) 3 c) 2 d) -2 e) -4

Resolución

Según el dato, tenemos:
$a_{11} = -12$
$a_3 = 12$
$a_{11} - a_3 = -12 - 12$
$(11-3)r = -24$ (r es la razón de la P.A.)
$r = -3$

La diferencia común es: $r = -3$

Clave a

2. El cuarto término de una sucesión es 29 y el décimo quinto término es 117. Calcula el séptimo término.

a) 15 b) 18 c) 53 d) 4 e) 32

Resolución

Se tiene:

$$\underbrace{a_1 \; ; \; a_2}_{r} \; ; \; \underbrace{\; ; \; a_3}_{r} \; ; \; \underbrace{a_4}_{29} \; ; \; \ldots \; \underbrace{a_7}_{\text{piden}} ; \ldots \; \underbrace{a_{15}}_{117}$$

Sabemos que: $\mathbf{a_{15} - a_4 = (15 - 4)r}$

$\mathbf{117 - 29 = 11r}$ ® $\mathbf{r = 8}$

Luego: $\mathbf{a_7 - a_4 = (7 - 4)r}$

$\mathbf{a_7 - 29 = 3(8)}$ 4 $\mathbf{a_7 = 53}$

Clave c

3. ¿Cuántos términos tiene la P.A.?

$12_{(n)} \; ; \; 17_{(n)} \; ; \; 24_{(n)} \; ; \; 31_{(n)} \; ; \ldots ; \; 620_{(n)}$

a) 75 b) 72 c) 77 d) 79 e) 81

Resolución

Al pasar a base 10 tenemos:

$$\mathbf{(n+2) \; ; \; (n+7) \; ; \; (2n+4) \; ; \; (3n+1) \; ; \ldots ; \; (6n^2+2n)}$$

5

Si del 2.º y 1.^er término se obtiene razón 5, entonces del 3.^er y 2.º término la razón también es 5:

$$\mathbf{(2n + 4) - (n + 7) = 5}$$
$$\mathbf{n = 8}$$

La P.A. es: $\mathbf{10 \; ; \; 15 \; ; \; 20 \; ; \; 25 \; ; \ldots ; \; 400}$

5 5 5

Al reemplazar tenemos:

$$4 \; \textbf{N.º de términos} = \frac{400-10}{5} + 1 = 79$$

Clave d

Resolviendo en clase

1 Hallar "n" de la siguiente progresión aritmética:

$$2n+3 \; ; \; 2n+6 \; ; \; 3n+2 \; ; \; ... \; ; \; 137$$

Resolución:

Rpta:

2 Hallar la suma de los términos vigésimo cuarto y el trigésimo segundo de la siguiente progresión:

$$81 \; ; \; 85 \; ; \; 89 \; ; \; ...$$

Resolución:

Rpta:

3 En una progresión aritmética de 10 términos, el primer término es 4 y el último término es 40. Calcular el valor de la razón.

Resolución:

Rpta:

4 En una progresión aritmética de 35 términos, el último término es 229 y el primero 25. Determinar el octavo término.

Resolución:

Rpta:

5 **En la siguiente progresión aritmética la cantidad de términos, es:**

$$23_{(n)} ; 30_{(n)} ; 34_{(n)} ; \ldots ; 155_{(n)}$$

Resolución:

Rpta:

6 **El primer y último término de una progresión aritmética es aa y 36a , si la razón es "a" y el número de términos es 51. Determinar el valor de "a".**

Resolución:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Calcular la suma de términos:

$$10 + 15 + 20 + \ldots + 555$$

8. Calcular la suma de términos:

$$\underbrace{185+178+171+\ldots}_{15 \text{ términos}}$$

9. Cuantos números existen en la siguiente forma:

$$a(a+3)b(2b)c(c/2)_{(9)}$$

10. ¿Cuántas cifras se emplearán para numerar las 1 000 páginas de un libro?

11. Si al numerar las páginas de un libro se han empleado 873 tipos de imprenta, entonces la cantidad de páginas que tiene el libro es:

12. Para numerar un libro de 1ab páginas se han empleado 297 tipos de imprenta. ¿Cuantos tipos de imprenta se emplearán para enumerar un libro de ab1 páginas.

Para reforzar

1. En una progresión aritmética de cinco términos, el primer término es 3 y su razón es 7. Calcular el valor del quinto término.

a) 12 b) 15 c) 35
d) 38 e) 31

2. Hallar "x" de la siguiente progresión aritmética:

$$x-1 \ ; \ 2x+3 \ ; \ 5x-1 \ ; \ \ldots$$

a) 4 b) 5 c) 7 d)
9 e) 11

3. En la siguiente progresión aritmética:
40 ; 46 ; 52; ... el término de lugar 68, es:

a) 440 b) 402 c) 442
d) 534 e) 726

4. Hallar el número de términos:

$$5 \ ; 9 \ ; 13 \ ; \ldots ; 441$$

a) 106 b) 107 c) 108
d) 109 e) 110

5. En la siguiente progresión aritmética la cantidad de términos, es:

$$34_{(n)} ; 41_{(n)} ; 46_{(n)} ; \ldots ; 142_{(n)}$$

a) 14 b) 15 c) 16
d) 17 e) 18

6. En una P.A. de 48 términos, el primer término es 14 y el último 296. El término décimo cuarto es:

a) 94 b) 92 c) 76
d) 84 e) 50

7. Calcular la suma de términos:

$$\underbrace{6+18+30+\ldots}_{19\ \text{ter min os}}$$

a) 2025 b) 2104 c) 2152
d) 2160 e) 2166

8. Calcular la suma de términos:

$$18 + 33 + 48 + \ldots + 453$$

a) 7032 b) 7144 c) 7206
d) 7093 e) 7065

9. ¿Cuántos numerales de la siguiente forma existen en base 13?

$$a(a+4)b(b\quad 5)$$

a) 60 b) 62 c) 64
d) 66 e) 68

10. ¿Cuántos tipos de imprenta se utilizan para numerar las 260 páginas de un libro?

a) 672 b) 675 c) 649
d) 669 e) 642

11. Si al numerar las páginas de un libro se han empleado 927 tipos de imprenta, entonces la cantidad de páginas que tiene el libro es:

a) 329 b) 328 c) 327
d) 326 e) 345

12. Al escribir la siguiente secuencia: 1;2;3;...;UNI se han empleado 2130 tipos de imprenta. Hallar el valor de: $U + N + I$

a) 15 b) 16 c) 17
d) 18 e) 19