

Aritmética

CONTEO DE NUMEROS

1. INTRODUCCIÓN

En el presente capítulo abordaremos conceptos y problemas que fueron tratados por grandes matemáticos hace miles de años, tal es el caso de lo registrado en el papiro RHIND, hallado por éste a fines del siglo XIX, que fue escrito unos 2000 años antes de nuestra era.

Entre los problemas aritméticos que figuraban en dicho papiro está el de "la repartición del pan", que lo plantearemos como un desafío más adelante.

Por otro lado, la naturaleza nos muestra que muchos fenómenos pueden ser analizados según su recurrencia, por ejemplo: el cometa Halley es visible desde la Tierra cada 76 años; así también en nuestra vida encontramos aplicaciones sencillas como:

Ejemplo inductivo:

Un médico recetó a Esmeralda tomar una pastilla cada 5 días a partir del 7 de marzo y durante dicho mes. Completa el siguiente esquema:

Nº de toma:	1.º	2.º	3.º	...
	↓	↓	↓	
Día:	:	7	...	...

Además:

I. La tercera toma fue el día ____ de marzo.

II. La última toma fue el día ____ de marzo y fue la ____ toma.

III. La diferencia de días entre dos tomas consecutivas es ____ días.

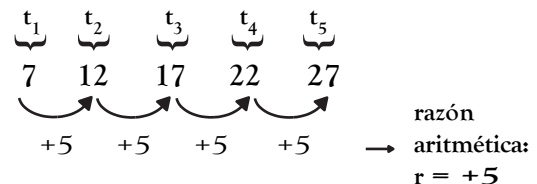
De este ejemplo se observa que:

i. El conjunto: 7, 12, 17, 22, 27 es un conjunto ordenado, donde a cada elemento llamaremos **término**.

ii. Cada término tiene un **orden** designado o **número ordinal**, el cual guarda una correspondencia con su respectivo término. Del ejemplo:

primer término: $t_1 = 7 = 1 \times 5 + 2$
 segundo término: $t_2 = 12 = 2 \times 5 + 2$
 tercer término: $t_3 = 17 = 3 \times 5 + 2$
 cuarto término: $t_4 = 22 = 4 \times 5 + 2$
 quinto término: $t_5 = 27 = 5 \times 5 + 2$

iii. La característica fundamental de este tipo de conjuntos es que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera es siempre un valor constante que llamaremos **razón aritmética** (r). Del ejemplo:



"A un conjunto con esta característica lo llamaremos **progresión aritmética**".

2. DEFINICIÓN

Una progresión aritmética es un conjunto de números ordenados, de tal manera que la diferencia de dos términos consecutivos cualesquiera (el de mayor orden menos el otro) es siempre una constante llamada valor de la razón aritmética (r).

Ejemplo:

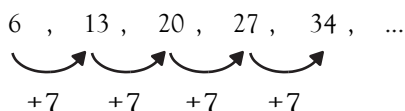
N.º ordinal:	1.º	2.º	3.º	4.º	...	n.º
	↓	↓	↓	↓		↓
Término :	5	8	11	14	...	3n+2

razón aritmética: $r = +3$

Según el signo del valor de la razón aritmética, las progresiones aritméticas pueden ser:

2.1. Progresión aritmética creciente

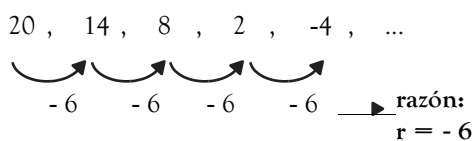
Cuando la razón es positiva ($r > 0$).



razón: $r = +7$

2.2. Progresión aritmética decreciente

Cuando la razón es negativa ($r < 0$).



razón:
 $r = -6$

3. CÁLCULO DE UN TÉRMINO DE LA P.A. CUYO LUGARES "n":

Se recomienda establecer una correspondencia entre cada término y su respectivo número ordinal.

Ejemplo inductivo:

Dada la P.A. : 6, 10, 14, 18, ...

Halla:

- El término de enésimo lugar (t_n).
- El término de vigésimo lugar (t_{20}).

Resolución

N.º ordinal:	1.º	2.º	3.º	4.º	...	n.º
	↓	↓	↓	↓		↓
Término :	6	10	14	18	...	t_n
		↗	↗	↗		
		+4	+4	+4		...

- Cada término se deberá expresar en función de su número ordinal y la razón.

$$\begin{aligned} t_1 &= 6 \\ t_2 &= 6 + 1(4) \\ t_3 &= 6 + 2(4) \\ t_4 &= 6 + 3(4) \end{aligned}$$

...

$$t_{10} = 6 + 9(4)$$

...

$$t_n = 6 + (n - 1)(4)$$

$$t_n = 4n + 2$$

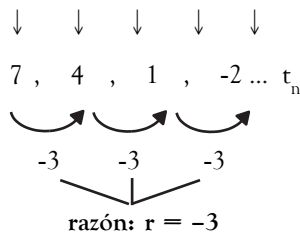
- A partir de " t_n " hallaremos " t_{20} ", para lo cual $n = 20$ (lugar 20).

$$t_{20} = 4(20) + 2 = 82$$

Ejemplo:

Dada la siguiente progresión aritmética, halla el término enésimo (t_n).

N.º ordinal : 1.º 2.º 3.º 4.º ... n.º



razón: $r = -3$

Luego:

$$\begin{aligned} t_1 &= 7 \\ t_2 &= 7 - 1(3) \\ t_3 &= 7 - 2(3) \\ t_4 &= 7 - 3(3) \end{aligned}$$

...

$$t_n = 7 - 3(n - 1)$$

$$\therefore t_n = 10 - 3n$$

En general:

Dada una progresión aritmética, el término de enésimo lugar (t_n) se calcula:

$$t_n = t_1 + (n - 1) \cdot r$$

Ejemplo:

Halla el término de enésimo lugar para cada una de las siguientes progresiones aritméticas:

- i. 57, 64, 71, 78, ...
- ii. 29, 18, 7, -4, ...
- iii. 1, 7, 13, 19, ...

Ejemplo:

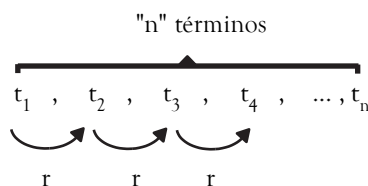
Calcula los cuatro primeros términos para cada una de las tres P.A., si sus respectivos términos de enésimo lugar se expresan así:

- i. $t_n = 120 + 9n$
- ii. $t_n = 13 - 8n$
- iii. $t_n = -20 + 6n$

4. CÁLCULO DEL NÚMERO DE TÉRMINOS DE UNA P.A.

PROBLEMA GENERAL

Dada la siguiente progresión aritmética finita, calcula el número de términos (n).



Sabemos : $t_n = t_1 + (n - 1) \cdot r$

Despejando "n", tenemos:

$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1$$

* Observa que para calcular el número de términos "n", necesitas:

r : razón aritmética

t_n : último término

t_1 : primer término

$$\# \text{ términos} = \frac{\text{último} - \text{primero}}{\text{razón}} + 1$$

* **Aplicación:**

¿Cuántos términos tiene la siguiente P.A.?

20, 31, 42, 53, ... , 669

Resolución

Nos piden el número de términos (n) para lo cual necesitamos:

$$r = 31 - 20 = 11$$

$$t_1 = 20$$

$$t_n = 669$$

$$n = \frac{669 - 20}{11} + 1 = \frac{649}{11} + 1 = 60$$

∴ La P.A. tiene 60 términos.

Ejercicios:

Calcula la cantidad de términos de cada una de las siguientes P.A.:

- i. 45, 53, 61, 69, ... , 437
- ii. 58, 46, 34, ... , -350
- iii. 36, 37, 38, ... , 570
- iv. $\overline{11a}, \overline{12a}, \overline{13a}, \dots, \overline{63a}$

5. CÁLCULO DE LA CANTI-DAD DE CIFRAS AL ESCRIBIR LOS TÉRMINOS DE UNA PROGRESIÓN ARITMÉTICA FINITA

Ejemplo inductivo:

Calcula cuántas cifras se utilizarán al escribir los enteros consecutivos desde 56 hasta 499.

Resolución

Observa que del 56 hasta el 499 todos los números no tienen la misma cantidad de cifras, por lo que nos conviene formar grupos de números que tengan igual número de dígitos. En este caso:

i. **Números de dos cifras:**

56, 57, 58, ... , 99

* Número de términos:

$$99 - 55 = 44 \text{ términos}$$

* Cantidad de cifras:

$$44 \times 2 = 88 \text{ cifras}$$

└ cada término
tiene dos cifras

ii. Números de tres cifras:

100, 101, 102, ..., 499

* Número de términos:

$$499 - 99 = 400 \text{ términos}$$

* Cantidad de cifras:

$$400 \times 3 = 1200 \text{ cifras}$$

└ cada término
tiene tres cifras

Luego:

Cantidad total de cifras:

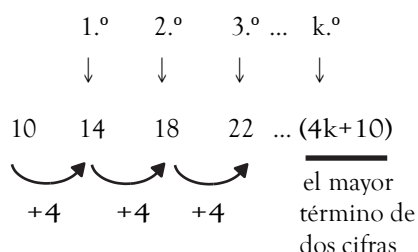
$$88 + 1200 = 1288 \text{ cifras}$$

Ejercicios:

¿Cuántas cifras se utilizarán para escribir todos los términos de dos cifras de la siguiente P.A. 14, 18, 22, ... ?

Resolución

Para calcular el número de cifras totales debes averiguar cuántos términos de dos cifras tiene la P.A. de la siguiente forma:



Observa que el esquema indica que la P.A. tiene "k" términos de dos cifras por lo que:

es máximo de dos cifras

$$\overbrace{4k + 10} < 100$$

↓

Evaluando: 22

Luego, hay 22 términos de dos cifras cada uno, entonces el número de cifras totales es $22 \times 2 = 44$ cifras.

6. NÚMEROS CONDICIONADOS

Son aquellos números cuyas cifras se caracterizan por cumplir determinadas condiciones. No forman necesariamente una progresión aritmética y para contarlos utilizaremos el principio de multiplicación.

6.1 Principio de Multiplicación

Si un procedimiento o actividad, se puede efectuar de "m" maneras y otro de "n" maneras, y cada uno de los primeros puede ser seguido por cualquiera de los otros, entonces el número de maneras de realizar el primero seguido del segundo es "m x n".

Ejercicios:

¿Cuántos números de dos cifras se pueden formar con las cifras 0; 3; 4; 7 y 9?

Resolución

Son números de la forma $\overline{ab}$.

- i. La cifra **a**, por ser primera cifra, toma valores diferentes de cero: 3; 4; 7 ó 9. Los posibles valores de **a** son 4.
- ii. La cifra **b** puede tomar los valores 0; 3; 4; 7 ó 9. Puede tomar 5 posibles valores.

Por lo tanto, el total de números de la forma $\overline{ab}$ es $4 \times 5 = 20$ números.

Nótese que no ha sido necesario escribir los 20 números, de los cuales algunos son 30; 33; 34; 37; 39; 40; 43; 44; 47; 49; etc. Estos números no forman una progresión aritmética.

Para contar la cantidad de números que poseen determinadas características en sus cifras, se procede del modo siguiente:

- a) Se representa la forma general de numeral.
- b) Se cuenta los valores que puede tomar cada cifra independiente del número.
- c) Por el principio de multiplicación, se toma el producto de la cantidad de valores que toman las cifras independientes. Éste será el total de números condicionados.

Ejercicios:

¿Cuántos números de 3 cifras cumplen con que su cifra de centenas es el doble de su cifra de unidades?

Resolución

Representación general: $\overline{(2a)ba}$



Doble del valor de unidades

Contando: Valores de a: 1; 2; 3; 4 $\Rightarrow$ 4 valores
Valores de b: 0; 1; 2; ..., 9 $\Rightarrow$ 10 valores
Total $4 \times 10 = 40$ números

Ejercicios:

¿Cuántos números impares de 3 cifras empiezan en cifra par menor que 6?

Resolución

Representación : $\overline{abc}$

Valores de a : 2; 4 $\Rightarrow$ 2 valores

Valores de b: 0;1;2;...;9 $\Rightarrow$ 10 valores

Valores de c: 1;3;5;7;9 $\Rightarrow$ 5 valores

Total $2 \times 10 \times 5 = 100$ números

6.2. Método Combinatorio

❖ Permutación

Es un arreglo u ordenación de todos o parte de los elementos de un conjunto, considerando el orden en que se encuentran.

135 153

513 531 cifras 1; 3 y 5.

El número de permutaciones que se puede formar con "n" elementos, ordenados en grupos de "k" elementos y denotado como $P(n, k)$ está dado por:

$$P(n, k) = \frac{n!}{(n - k)!}$$

Por ejemplo, las permutaciones de 3 objetos ordenados de 3 en 3, $P(3 ; 3)$ están dadas por:

$$P(3) = \frac{3!}{(3 - 3)!} = 3! = 1 \times 2 \times 3 = 6$$

Ejercicios:

¿Cuántos números de 2 cifras y sin repetición se pueden formar con las cifras 3; 5; 7; 8 y 9?

Resolución

Se trata de las permutaciones de 5 objetos, ordenados de 2 en 2: $P(5 ; 2)$

$$P(5, 2) = \frac{5!}{(5 - 2)!} = \frac{5!}{3!} = 4 \times 5 \Rightarrow P(5; 2) = 20$$

Existen 20 números.

❖ Permutaciones con repetición

Son los ordenamientos que se puede formar con una cierta cantidad de elementos, de modo que uno o más elementos se repiten.

1123 1132 2113 3112
1231 1321 2311 3211 Permutaciones obtenidas
1213 1312 2131 3121 con las cifras 1; 1; 2 y 3.

El número de permutaciones que se puede formar con "n" objetos, de los cuales uno se repite " R_1 " veces, otro " R_2 " veces y así los demás, y denotado por $P_R(n, R_1, R_2, R_3, \dots, R_k)$, donde $n = R_1 + R_2 + R_3 + \dots + R_k$, está dado por:

$$P_R(n, R_1, R_2, \dots, R_k) = \frac{n!}{R_1! R_2! \dots R_k!}$$

Por ejemplo, las permutaciones de 4 objetos de los cuales uno se repite dos veces, como 1; 1; 2; 3, son :

$$P_R(4; 2; 1; 1) = \frac{4!}{2! 1! 1!} = 12$$

Nótese que para simplificar la expresión anterior, bastará con tomar sólo las veces que se repiten los objetos más de una vez:

$$P_R(4 ; 2) = \frac{4!}{2!} = 12$$

Ejercicios Resueltos

1. El tercer término de una sucesión es 12 y el décimo primer término es -12. Halla la diferencia común.

- a) -3 b) 3 c) 2
d) -2 e) -4

Resolución

Según el dato, tenemos:

$$a_{11} = -12$$

$$a_3 = 12$$

$$a_{11} - a_3 = -12 - 12$$

$$(11-3)r = -24 \text{ (r es la razón de la P.A.)}$$

$$r = -3$$

La diferencia común es: $r = -3$

Clave a

2. El cuarto término de una sucesión es 29 y el décimo quinto término es 117. Calcula el séptimo término.

- a) 15 b) 18 c) 53
d) 4 e) 32

Resolución

Se tiene:

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & ; & a_2 & ; & a_3 & ; & a_4 & ; & \dots & a_7 & ; \dots & a_{15} \\ & \nearrow & \nearrow & & \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & \downarrow \\ & r & r & & 29 & & \text{piden} & & & 117 & & \end{array}$$

Sabemos que: $a_{15} - a_4 = (15 - 4)r$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ 117 - 29 & = & 11r \Rightarrow r = 8 \end{array}$$

Luego: $a_7 - a_4 = (7 - 4)r$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \\ a_7 - 29 & = & 3(8) \quad \therefore a_7 = 53 \end{array}$$

Clave c

3. ¿Cuántos términos tiene la P.A.?

$$12_{(n)} ; 17_{(n)} ; 24_{(n)} ; 31_{(n)} ; \dots ; 620_{(n)}$$

- a) 75 b) 72 c) 77
d) 79 e) 81

Resolución

Al pasar a base 10 tenemos:

$$(n + 2) ; (n + 7) ; (2n + 4) ; (3n + 1) ; \dots ; (6n^2 + 2n)$$

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ 5 \end{array}$$

Si del 2.º y 1.º término se obtiene razón 5, entonces del 3.º y 2.º término la razón también es 5:

$$\begin{aligned} (2n + 4) - (n + 7) &= 5 \\ n &= 8 \end{aligned}$$

La P.A. es: $10 ; 15 ; 20 ; 25 ; \dots ; 400$

$$\begin{array}{ccccccc} & \nearrow & \nearrow & \nearrow & & & \\ & 5 & 5 & 5 & & & \end{array}$$

Al reemplazar tenemos:

$$\therefore \text{N.º de términos} = \frac{400-10}{5} + 1 = 79$$

Clave d

4. En la numeración de las $\overline{1ab}$ primeras páginas, se emplearon $\overline{3ab}$ cifras. ¿Cuántas páginas tiene el libro si se han empleado $\overline{6ab}$ cifras?

- a) 254 b) 260 c) 264
d) 272 e) 302

Resolución

Se tiene:

$$\begin{array}{c} \overbrace{1 ; 2 ; 3 ; 4 ; \dots ; 1ab} \\ \downarrow \\ 3ab \text{ cifras} \end{array}$$

D.P por bloques:

$$\begin{aligned} \# \text{ de cifras} &= (\overline{1ab} + 1)3 - 111 = \overline{3ab} \\ (100 + \overline{ab} + 1)3 - 111 &= 300 + \overline{ab} \\ 3 \cdot \overline{ab} + 300 + 3 - 111 &= 300 + \overline{ab} \\ \overline{ab} &= 54 \end{aligned}$$

Supongamos que en un libro de "n" páginas se emplea $\overline{6ab} = 654$ cifras.

$$\begin{aligned} \Rightarrow (n+1)3 - 111 &= 654 \\ n &= 254 \end{aligned}$$

$\therefore$ El N.º de páginas es 254.

Clave a

Resolviendo en clase

- 1 Halle el vigésimo término de la siguiente P.A.:

$$43_{(7)}; 61_{(7)}; 106_{(7)}; \dots$$

De como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución:

- 3 Cuántos términos tiene la siguiente P.A.:

$$ab, 23, cd, 37, \dots, abc$$

Resolución:

Rpta:

- 2 Si: $x; y; z; \dots$ es una progresión aritmética y

$$x - 4; x; x + 2; \dots$$

$$y + 1; 3y; 9y - 6; \dots$$

Son progresiones geométricas, halle el valor “z”

(UNMSM 2012-I)

Resolución:

Rpta:

- 4 El primer y último término de una progresión aritmética es aa y $36a$. Si la razón es “a” y el número de términos es 51. Determinar el valor de “a”.

Resolución:

Rpta:

Rpta:

- 5 Si el segundo y noveno término de una progresión aritmética son 7 y 28, respectivamente, halle el vigésimo término de dicha progresión.

(UNMSM 2011-II)

Resolución:

- 6 Qué lugar ocupa el término central de la siguiente progresión aritmética:

$$ab(a - b), \dots, a8, 52, 3b, cd$$

Resolución:

Rpta:

Rpta:

Ahora en tu cuaderno

7. Dadas las siguientes P.A.:
- $$P.A._1 = 30, 42, 54, \dots$$
- $$P.A._2 = 81, 96, 111, \dots$$
- Halle el vigésimo término común y el lugar que ocupa en la primera P.A.
8. Si la suma de los 2 primeros términos de una progresión aritmética es la solución positiva de la ecuación: $x^2 + 6x - 55 = 0$ y el quinto término es 13. Hallar la razón de la progresión. (UNI 1987)
9. Para numerar un libro de 1ab páginas se han empleado 297 tipos de imprenta. ¿Cuántos tipos de imprenta se emplearán para enumerar un libro de ab1 páginas.
10. ¿Cuántas hojas tiene un libro sabiendo que en la enumeración de todas ellas se observó que en las 12 últimas se utilizaron 69 cifras?
11. Calcule "a + b + c", si para escribir todos los términos del siguiente conjunto ordenado: 30, 35, 40, ... , se empleó 508 cifras.
12. Halle cuántas cifras se emplearán al escribir todos los términos de la siguiente progresión aritmética:
- $$a1, a9, bc, dd, \dots, d(a - 1)c$$

Para reforzar

1. Halle la fórmula (general) del término enésimo de la siguiente P.A.: 53, 65, 77, ..., t_n

a) $50 + 6n$ b) $37 + 16n$ c) $17 + 12n$
d) $47 + 6n$ e) $41 + 12n$

2. Halle el término de lugar 23 de la siguiente P.A.: $12_{(5)}$; $23_{(5)}$; $34_{(5)}$, ... de como respuesta la suma de sus cifras.

a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

3. Hallar el número de términos:

5 ; 9 ; 13 ; ... ; 441

a) 106 b) 107 c) 108
d) 109 e) 110

4. Halle el mayor término de tres cifras de la siguiente P.A.: 33, 38, 43, 48, ...

a) 993 b) 999 c) 990
d) 998 e) 988

5. Halle el tercer término positivo de:

- 141, - 132, - 123, ...

a) 5 b) 9 c) 12
d) 22 e) 21

6. Cuántos términos tiene la siguiente P.A.:

8a, bc, aa, def, ..., fff

a) 46 b) 82 c) 84
d) 60 e) 72

7. La diferencia entre el quinto y segundo término de una P.A. es 33, halle la diferencia entre el término de lugar 15 y el de lugar 23.

a) 22 b) 11 c) 40
d) 88 e) 68

8. Calcule la suma de cifras del décimo tercer término de la siguiente P.A.:

$511_{(n)}$, ..., $100_{(n)}$, $52_{(n)}$, $34_{(n)}$

a) 5 b) 11 c) 6
d) 7 e) 8

9. Calcule la suma de cifras del antepenúltimo término de la siguiente P.A.:

a1, bb, a9, ..., abc

si además: $c > a$

a) 19 b) 9 c) 11
d) 8 e) 13

10. ¿Cuántas cifras se han empleado para enumerar las 650 hojas de un libro?

a) 4093 b) 3983 c) 4183
d) 1842 e) 4993

11. Al escribir la siguiente secuencia 1 ; 2 ; 3 ; ... ; UNI se han empleado 2130 tipos de imprenta. Hallar el valor de:

$U + N + I$

a) 15 b) 16 c) 17
d) 18 e) 19

12. Cuántas cifras se utilizarán para escribir todos los términos de la siguiente P.A.:

43, 51, 59, ..., 1203

a) 528 b) 456 c) 544
d) 654 e) 356