



CERTEZAS

CERTEZAS

Según la Real Academia Española, la «certeza» es una forma de adhesión de la mente a algo conocible, sin temor a error. Para nuestro curso de Razonamiento Matemático, las certezas son procesos por los cuales obtenemos el resultado de un problema con anticipación.

1. SITUACIONES DESFAVORABLES

Son situaciones en contra o negativas. Son aquellos casos que son contrarios a lo que buscamos de acuerdo a la pregunta planteada. Para dar una solución a un problema de «certezas» por lo general se analiza la situación negativa, para luego agregar las cosas necesarias para dar solución al ejercicio.

Ejemplo 1:

Juan Carlos tiene un par de canicas negras y 3 canicas blancas en una bolsa. ¿Cuál es la menor cantidad que debe extraer al azar para tener la certeza de tener en su mano una canica negra?

Resolución:

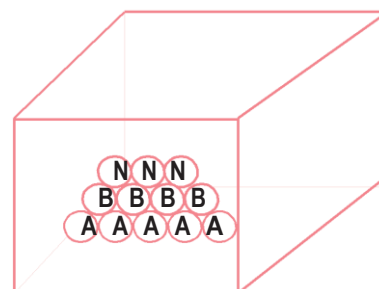
- ♦ Si lo que piden es obtener una canica negra, entonces
- ♦ ... la situación desfavorable sería obtener primero todas las canicas que no sean negras, o sea
- ♦ ... obtener las canicas blancas ...

Luego:

$$\underbrace{3}_{\text{Total de canicas blancas}} + \underbrace{1}_{\text{La menor cantidad de canicas negras}} = 4$$

Ejemplo 2:

En una caja se tiene 3 bolas negras, 4 blancas y 5 azules. ¿Indica cuántas bolas se deben extraer al azar de uno en uno y como mínimo para estar seguros de haber extraído por lo menos:



- a) Una bola negra
- b) Una bola azul
- c) Una blanca o una negra
- d) Dos azules
- e) Dos de igual color
- f) Tres del mismo color
- g) Dos de diferente color
- h) Tres de diferentes colores
- i) Una blanca y una azul
- j) Dos blancas y dos azules
- k) Todas las blancas
- l) Un grupo completo

Resolución:

Utiliza el criterio de analizar las situaciones negativas en primer lugar, de tal manera que se garanticen los resultados deseados, tenemos que:

- a) Si queremos 1 negra, un caso de infortunio es que nos resulten de cualquier color, excepto el buscado, hasta agotar todas las situaciones negativas.

$$\text{Así: } 5A + 4B + \textcircled{1N} = 10$$

∴ Se debe extraer como mínimo 10 bolas.

- b) De la misma manera, como en el anterior, un caso extremo de infortunio es el siguiente resultado, buscando una bola azul.

$$\text{Así: } 3N + 4B + 1A = \textcircled{8}$$

∴ Se debe extraer como mínimo 8 bolas.

- c) El resultado que exprese el peor de los casos (se busca 1B ó 1N) es el siguiente:

$$\text{Así: } 5A + \textcircled{1} = 6$$

con seguridad será blanca o negra

∴ Se debe extraer como mínimo 6 bolas.

- d) Buscamos 2 bolas azules, entonces un caso extremo será extraer todas las negras, todas las blancas y luego las 2 azules.

$$\text{Así: } 3N + 4B + \textcircled{2A} = 9$$

∴ Se debe extraer como mínimo 9 bolas.

- e) Buscamos 2 bolas iguales, entonces el peor de los casos es que en principio salgan diferentes.

$$\text{Así: } 1B + 1N + 1A + \textcircled{1} = 4$$

completa el par de bolas iguales

∴ Se debe extraer como mínimo 4 bolas.

- f) Buscamos 3 bolas iguales, entonces el peor de los casos es que vayan saliendo hasta 2 iguales en todos los colores.

$$\text{Así: } 2B + 2N + 2A + \textcircled{1} = 7$$

completa con cualquiera de las anteriores un grupo de tres iguales

∴ Se debe extraer como mínimo 7 bolas.

- g) Buscamos 2 bolas diferentes, entonces, el peor de los casos es que nos resulten en principio todos iguales de aquel color que tengo mayor cantidad de bolas.

completa con 1 de los azules las 2 bolas diferentes que buscamos

$$\text{Así } 5A + \textcircled{1} = 6$$

∴ Se debe extraer como mínimo 6 bolas.

¿Sabías Que...?

Lo dijo...

Leibniz

Considerando la matemática desde el comienzo del mundo hasta la época de Newton, lo que él ha hecho es, con mucho, la mitad mejor.



La ilusión de Zöllner



Las líneas verticales, ¿son o no paralelas?
Fíjate bien y razona el porqué.

- h) Buscando 3 bolas diferentes, entonces, el peor de los casos es que en principio nos resulten todos iguales hasta en dos grupos completos que tengan mayor cantidad de bolas, así:

$$\underbrace{5A + 4B}_{\text{hasta aquí no tenemos 3 diferentes}} + \textcircled{1N} = 10$$

hasta aquí no tenemos 3 diferentes

∴ Se debe extraer 10 bolas, como mínimo.

- i) Obtener 1 bola blanca y 1 bola azul es nuestro objetivo, entonces el peor de los casos sucede cuando salen:

$$3N + 5A + \textcircled{1B} = 9$$

∴ Se debe extraer como mínimo 9 bolas.

- j) Buscamos 2 blancas y 2 azules, entonces el peor de los casos sucede cuando extraemos:

$$3N + 5A + \textcircled{2B} = 10$$

∴ Se debe extraer como mínimo 10 bolas.

- k) Buscamos todos los blancos, el peor de los casos sucede cuando nos resulten así:

$$5A + 3N + \textcircled{4B} = 12$$

∴ Se debe extraer como mínimo 12 bolas, es decir todas las bolas.

- l) Buscamos un grupo completo, entonces el peor de los casos sucede cuando en principio nos resulten grupos «casi completos», es decir:

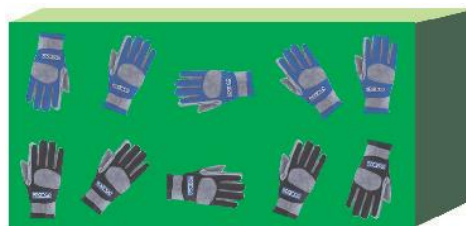
$$\underbrace{4A + 3B + 2N}_{\text{hasta aquí ningún grupo está completo}} + \textcircled{1} = 10$$

∴ Se debe extraer como mínimo 10 bolas.

Ejemplo 3:

Se tiene en una urna 5 pares de guantes blancos y se empiezan a extraer una por una. Si se quiere estar seguro de haber obtenido un par de guantes utilizables, ¿cuántos se deben extraer como mínimo?

Resolución:



Nuestro objetivo es obtener un par de guantes utilizables, es decir:

- { 1 guante blanco (derecho)
- { 1 guante blanco (izquierdo)

¿Sabías Que?

Las tres pastillas

El señor Pi tiene una extraña enfermedad que hace que deba tomar todos los días dos pastillas, una del tipo «A» y otra del tipo «B». Estas pastillas son exactamente iguales en peso, color, sabor, etc.

Es imposible distinguirlas externamente y es vital que Pi se tome una de cada tipo cada día. Un día sin darse cuenta, Pi coge por error dos del tipo «A» y una del tipo «B». Tiene las tres pastillas en la mano y no puede diferenciarlas. Sabe que debe tomar una cada día.

Pero no quiere tirarlas y simplemente coge otras porque son muy caras. ¿Qué debe hacer para tomar, ese día y los días siguientes, una pastilla de cada tipo sin equivocarse, y sin desperdiciar ninguna?

Luego, sería mucha suerte si con las dos primeras extracciones lográsemos nuestro objetivo, pero nada nos asegura ello, sin embargo, para garantizar el resultado esperado (1 guante derecho y el otro izquierdo), debemos ponernos en el peor caso de infortunio, es decir, extraer en principio todos los guantes de un solo lado. Así:

$$\underbrace{\text{Primeras 5 extracciones}}_{5 \text{ guantes derechos}} + \underbrace{6.^{\text{a}} \text{ Extracción}}_{1 \text{ guante izquierdo}} = 6$$



con seguridad, completo el par de guantes utilizables

∴ Se debe extraer 6 guantes, como mínimo.

MÁXIMOS Y MÍNIMOS

Cuando se trata de resolver un problema que puede tener varias soluciones, surge la idea de elegir la solución óptima, es decir, aquella que garantice un máximo de eficiencia o un mínimo de esfuerzo, entonces esta búsqueda de optimización es la idea central en el tratamiento de los ejercicios que resolveremos en este capítulo.

Ejemplo 4:

Sea $1 \leq x \leq 6$,

halla el máximo valor entero de: $A = 8x + 12$

Resolución:

El máximo valor entero que toma x es 6

$$\begin{aligned} A_{\text{MAX}} &= 8(6) + 12 \\ &= 48 + 12 = 60 \end{aligned}$$

Ejemplo 5:

La suma de dos números enteros positivos es 18. Halla la máxima diferencia que puede existir entre ellos.

Resolución:

$$a + b = 18$$

17	1
16	2
15	3
14	4
13	5
12	6
11	7
10	8
9	9

∴ Máxima diferencia es : $17 - 1 = 16$

Ejemplo 6:

Un kilogramo de manzanas contiene entre 12 y 13 manzanas. ¿Cuál es el mayor peso que puede tener 13 docenas de manzanas?

Resolución:



∴ El mayor peso contenido en 13 docenas de manzanas es 13 kg.

Augustus de Morgan (1806 – 1871)

Fue un matemático inglés nacido en la India. Acostumbraba a recrearse en el planteamiento de adivinanzas y problemas ingeniosos. Este personaje nacido en el siglo XIX, planteaba esta adivinanza sobre su edad: “El año x^2 tenía x años. ¿En qué año nació?”.

Respuesta

Basta con encontrar el único año (del siglo XIX) que es un cuadrado perfecto: $1849 = 43^2$
Por lo tanto, $x=43$ y el año de nacimiento es $1849 - 43 = 1806$.

ACTIVIDADES

- 1 ¿Cuántas personas deben estar reunidas, como mínimo, para tener la certeza de encontrar 2 con el mismo mes de cumpleaños?

Resolución:

Rpta:

- 3 Sebastián tiene en un establo:

- I. 15 caballos blancos.
- II. 15 caballos negros.
- III. 15 yeguas blancas.
- IV. 15 yeguas negras.

¿Cuántos animales debe sacar al azar como mínimo para tener la certeza de haber sacado una pareja mixta del mismo color?

Resolución:

Rpta:

- 2 Para dos números enteros que suman 20, podemos afirmar:

- I. La diferencia entre ellos podría ser cero. II. El máximo producto de ellos es 100.
- III. Los números son 10 y 10.

- a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
- d) I y II e) Todas

Resolución:

Rpta:

- 4 En una rifa se han hecho 1000 números y hay tres premios en sorteo. ¿Cuántos números se debe comprar para tener la certeza de obtener un premio?

Resolución:

Rpta:

5

ENUNCIADO 1:

De un juego de 52 naipes (13 de cada palo),
¿cuántas cartas hay que sacar al azar y como
mínimo para tener la seguridad de haber obtenido
una carta con numeración par de color rojo?

Resolución:

Rpta:

6

Del ENUNCIADO 1:

... una carta cuya numeración no sea mayor de 8?

Resolución:

Rpta:

ACTIVIDADES

7. Del ENUNCIADO 1:
... dos cartas con figura de corazón?

8. Del ENUNCIADO 1:
... dos corazones y un diamante?

9. Del ENUNCIADO 1:
... 3 naipes impares y múltiplos de 3?

10. Si con 6 tapas de gaseosa se puede pedir una gaseosa y Lucas reúne 51 tapas, halla el máximo número de gaseosas que puede tomar.

11. Se tiene 9 bolas de billar del mismo color y tamaño, pero una de ellas es un poco más pesada que las otras, que sí tienen el mismo peso. Si se dispone de una balanza de dos platillos, ¿cuál es el menor número de pesadas a efectuar para encontrar la más pesada?

12. Dos kilos de manzanas contienen desde 20 hasta 35 manzanas. ¿Cuál será el mínimo peso que tendrán 140 manzanas?

ACTIVIDADES

*** ENUNCIADO 1:**

En una urna oscura hay 10 bolas rojas, 7 blancas y 4 negras.

¿Cuántas bolas como mínimo se debe extraer al azar, para tener la certeza de obtener...

1. Del ENUNCIADO 1:
una bola roja?
a) 1 b) 12 c) 8
d) 11 e) 15
2. Del ENUNCIADO 1:
una bola roja o blanca?

a) 2 b) 15 c) 18
d) 5 e) 3
3. Del ENUNCIADO 1:
una bola de cada color?

a) 12 b) 15 c) 18
d) 17 e) 4
4. A un cerezo subí, donde cerezas habían; cerezas no comí ni cerezas dejé.
¿Cuántas cerezas no dejé?

a) 1 b) 0 c) 2
d) 3 e) 4
5. ¡Oferta!
«Por cinco chapitas, lleve gratis dos botellas completas».
Si Julio junta apresuradamente 26 chapitas,
¿cuántas botellas podrá consumir como máximo?

a) 10 b) 12 c) 16
d) 14 e) 15
6. En una jaula se encuentran 5 conejos blancos, 6 conejas blancas, 6 conejos marrones y 5 conejas marrones. ¿Cuál es el mínimo número de animales que se debe extraer para tener necesariamente un conejo y una coneja del mismo color?
a) 11 b) 12 c) 13
d) 14 e) 15

7. Cuatro constructores A, B, C y D presentan sus presupuestos para la construcción de 4 obras W, X, Y, Z; cuyos costos se muestran en la tabla dada.

¿Cuál es el presupuesto mínimo para hacer las 4 obras?

	W	X	Y	Z
A	2	3	2	4
B	2	2	3	5
C	3	1	2	3
D	5	1	3	2

- a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10
8. Si tengo en una caja roja, 9 cajas verdes dentro y 3 cajas azules dentro de cada una de las verdes, el total de cajas es:

a) 32 b) 37 c) 36
d) 38 e) 39
 9. Con seis palitos de fósforo, ¿cuántos triángulos equiláteros se pueden formar como máximo sin romper los palitos?
a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6
 10. ¿Cuántas veces debe lanzarse 1 dado para tener la seguridad de obtener 2 veces el mismo punto?

a) 3 b) 5 c) 6
d) No se puede determinar e) 7
 11. Verónica tiene una bolsa con 10 fichas numeradas del 1 al 10. ¿Cuál es el mínimo número de fichas que se han de extraer para tener la seguridad de haber sacado 3 fichas numeradas consecutivamente?
a) 6 b) 7 c) 9
d) 10 e) 8
 12. En una caja hay 10 pares de guantes utilizables de color negro y 10 pares de guantes utilizables de color rojo. ¿Cuántos guantes hay que sacar para estar seguro de obtener un par de guantes utilizables del mismo color?

a) 3 b) 16 c) 38
d) 20 e) 21