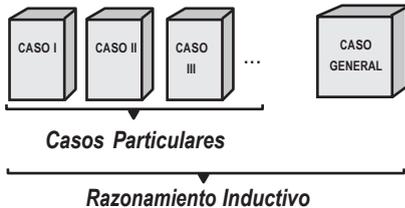




# CALCULO INDUCTIVO

## Lógica Inductiva

Consiste en la observación y análisis de casos particulares lo cual nos permite el descubrimiento de leyes generales, con la particularidad de que la validez de las últimas se deduce de la validez de las primeras.



### Ejemplo 1:

Al sumar números impares consecutivos en forma ordenada, tenemos:

$$\begin{aligned} S_1 &= 1 && = 1 = 1^2 \\ S_2 &= 1 + 3 && = 4 = 2^2 \\ S_3 &= 1 + 3 + 5 && = 9 = 3^2 \\ S_4 &= 1 + 3 + 5 + 7 && = 16 = 4^2 \\ &\vdots && \vdots \\ S_{10} &= 1+3+5+7+\dots+19=100 = 10^2 \end{aligned}$$

Vemos que el resultado de sumar números impares consecutivos es de la forma  $n^2$  donde "n" es la cantidad de números impares que se suman.

$$S_n = \underbrace{1+3+5+7+\dots}_{(n \text{ sumandos})} = n^2$$

### Ejemplo 2:

Halla la suma de cifras de:  $E = \underbrace{(111\dots111)^2}_{25 \text{ cifras}}$

#### Resolución:

Por inducción:

¶ Para 2 cifras:  $(11)^2 = 121$

¶ Suma de cifras =  $4 = \underbrace{(1 + 1)^2}_{2 \text{ cifras}}$

¶ Para 3 cifras:  $(111)^2 = 12321$

¶ Suma de cifras =  $9 = \underbrace{(1+1+1)^2}_{3 \text{ cifras}}$

¶ Para 4 cifras:  $(1111)^2 = 1234321$

¶ Suma de cifras =  $16 = \underbrace{(1+1+1+1)^2}_{4 \text{ cifras}}$



### Reto

La siguiente anécdota ocurrió en la ocupación de Francia por los alemanes, durante la Segunda Guerra Mundial.

Cuatro personas subían en el ascensor de un hotel, uno de los ocupantes era un oficial alemán, de uniforme, otro, un civil francés, enrolado en la resistencia. La tercera ocupante era una atractiva joven, y la cuarta, una dama de edad, ninguno conocía a los demás. Hubo de pronto un corte de energía. El ascensor se detuvo, las luces se fueron y todo quedó en profunda oscuridad, se oyó el chasquido de un beso, seguido por el retallar de un bofetón. Un instante después volvieron las luces. El oficial lucía un enorme chichón junto a un ojo. La señora mayor pensó: "¡Bien merecido lo tiene!, menos mal que las jóvenes de hoy saben hacerse respetar". La joven pensó: "¡Vaya gustos raros que tienen estos alemanes!, en lugar de besarme a mí ha debido besar a esta señora mayor o a este joven tan atractivo. ¡No me lo explico!".

El alemán pensó: "¿pero qué ha pasado? ¡Yo no he hecho nada!, quizás el francés ha querido abusar de la joven y ésta me ha pegado por error".

Sólo el francés conocía exactamente lo ocurrido.

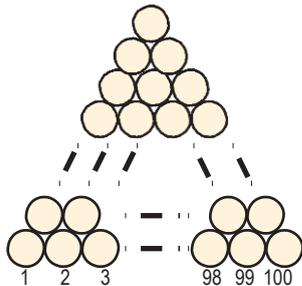
¿Sabrías deducirlo?

Se concluye que la suma de cifras del resultado de efectuar "E" sería:

$$\text{Suma de cifras} = \underbrace{(1+1+1+\dots+1)^2}_{25 \text{ veces}} = 25^2 = 625$$

**Ejemplo 3:**

Calcula la cantidad total de esferas que hay en el siguiente arreglo.

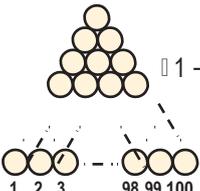


**Resolución:**

Debido a que la distribución de las esferas responde a una forma triangular, entonces analizaremos, recurriendo a la inducción, los casos iniciales a dicha formación.

	# esferas	Números triangulares	
<b>1.º caso</b>		1	= 1 = $\frac{1 \times 2}{2}$ → N.º esferas de la base
<b>2.º caso</b>		1 + 2	= 3 = $\frac{2 \times 3}{2}$ → N.º esferas de la base
<b>3.º caso</b>		1 + 2 + 3	= 6 = $\frac{3 \times 4}{2}$ → N.º esferas de la base
	⋮	⋮	⋮

**En general**



$$1 + 2 + 3 + \dots + 100 = \frac{100 \times 101}{2} = 5050$$

∴ Suma de esferas del arreglo triangular 5050.

**Suma de números en un calendario**

Se trata de poder sumar los nueve números contenidos en el cuadrado seleccionado en el calendario, bastando que nos digan el número menor del cuadrado. En este caso se trata del número 7.

Para averiguar la suma, debemos sumar 8 y después multiplicar por 9:

$$(7 + 8) \cdot 9 = 135$$

OCTUBRE						
L	M	M	J	V	S	D
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Al número que te den le sumas 8 y esta suma la multiplicas por 9.

También se puede hacer cuando los días están ordenados en vertical. La suma de los nueve números contenidos en el cuadrado es:

$$(2 + 8) \cdot 9 = 90$$

L	2	9	16	23
M	3	10	17	24
M	4	11	18	25
J	5	12	19	26
V	6	13	20	27
S	7	14	21	28
D	8	15	22	

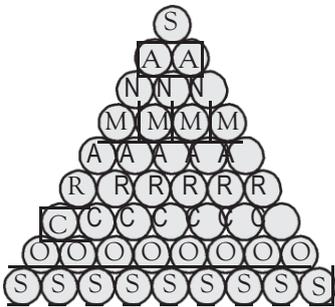
En cualquier hoja de calendario se pasa de un número al que hay debajo de él, sumando 7. En cualquier cuadrado de nueve números, se pasa del número menor al que ocupa el centro sumando 8.

Los nueve números de cada cuadrado de números se pueden escribir en función del número que ocupa el centro del cuadrado.



**Ejemplo 4:**

¿De cuántas formas distintas se puede leer "SAN MARCOS" en el siguiente arreglo?



**Resolución:**

Analizamos casos particulares:

# maneras que se puede leer

**1.º caso**



1

$$= 2^{1-1} \rightarrow \text{N}^\circ \text{ esfera de la base}$$

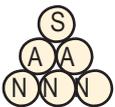
**2.º caso**



2

$$= 2^{2-1} \rightarrow \text{N}^\circ \text{ esferas de la base}$$

**3.º caso**

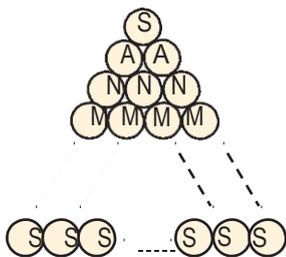


4

$$= 2^{3-1} \rightarrow \text{N}^\circ \text{ esferas de la base}$$

⋮

**En general**



$$= 2^{9-1} = 256$$

∴ Maneras distintas de leer "San Marcos": 256

**Ejemplo 5:**

Halla la suma de todos los elementos de la siguiente matriz.

1	2	3	4	...	9	10
2	3	4	5	...	10	11
3	4	5	6	...	11	12
4	5	6	7	...	12	13
⋮	⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
9	10	11	12	...	17	18
10	11	12	13	...	18	19

**Resolución:**

Sumar los 100 elementos que conforman la matriz va a ser demasiado operativo, aplicando inducción tendremos:

**1.º caso**



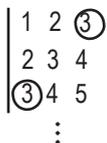
$$\square \text{ Suma} = 1 = (1)^3 \rightarrow \text{N}^\circ \text{ de Filas}$$

**2.º caso**



$$\square \text{ Suma} = 8 = (2)^3 \rightarrow \text{N}^\circ \text{ de Filas}$$

**3.º caso**



$$\square \text{ Suma} = 27 = (3)^3 \rightarrow \text{N}^\circ \text{ de Filas}$$

**En general**

1	2	3	...	9	10
2	3	4	...	10	11
3	4	5	...	11	12
4	5	6	...	12	13
⋮	⋮	⋮		⋮	⋮
10	11	12	...	18	19

$$\square \text{ Suma} = (10)^3 = 1000 \rightarrow \text{N}^\circ \text{ de Filas}$$

∴ Suma de todos los elementos 1000



**Reto**

Estás frente a tres apagadores, un pasillo y al fondo una habitación con la puerta cerrada. ¿Cómo saber cuál de los apagadores enciende el foco de la habitación recorriendo el pasillo una sola vez?

Enciendes el apagador 1 y esperas 5 minutos, lo apagas y enciendes el 2. Recorres el pasillo y abres la puerta: Si el foco está encendido, el apagador 2 es el bueno, si está apagado pero caliente es el 1 y si está frío, debe ser el 3.

## ACTIVIDADES

- 1 Calcula la suma de cifras del resultado en "E", si:

$$E = \underbrace{(333\dots33)^2}_{40 \text{ cifras}}$$

Resolución:

Rpta:

- 3 Calcula la suma de cifras del resultado de efectuar:

$$P = 997 \times 998 \times 999 \times 1000 + 1$$

Resolución:

Rpta:

- 2 Calcula la suma de cifras de "A", si:

$$A = \underbrace{(333\dots34)^2}_{100 \text{ cifras}}$$

Resolución:

Rpta:

- 4 Halla la última cifra luego de efectuar el producto:

$$R = (2^{2004} + 1)(2^{2003} + 1)(2^{2002} + 1) \dots (2^2 + 1)$$

Resolución:

Rpta:

5 ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer MENTOR en el siguiente arreglo?

```

      M
    M E M
  M E N E M
M E N T N E M
M E N T O T N E M
M E N T O R O T N E M
  
```

Resolución:

Rpta:

6 Halla el valor de la  $F(100)$ , si:

$$F(1) = 1$$

$$F(2) = 3 + 5$$

$$F(3) = 7 + 9 + 11$$

$$F(4) = 13 + 15 + 17 + 19$$

⋮

Resolución:

Rpta:

## ACTIVIDADES

7. Halla la suma de los elementos de la siguiente matriz de  $10 \times 10$ .

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & \dots & 18 & 20 \\ 4 & 6 & 8 & \dots & 20 & 22 \\ 6 & 8 & 10 & \dots & 22 & 24 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 18 & 20 & 22 & \dots & 34 & 36 \\ 20 & 22 & 24 & \dots & 36 & 38 \end{bmatrix}$$

8. Halla el valor de  $n$  si:

$$22 = \frac{22}{33} + \frac{2222}{3333} + \frac{222222}{333333} + \dots + \frac{\overbrace{222\dots 2}^{n \text{ cifras}}}{\underbrace{333\dots 3}_{n \text{ cifras}}}$$

9. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer "JESSICA"?

```

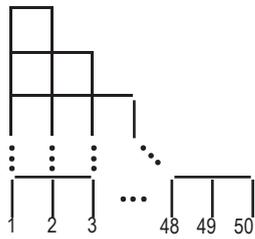
      J
    EEE
  SSSSS
SSSSSSS
IIIIIIIII
CCCCCCCCC
AAAAAAAAA
  
```

10. ¿De cuántas maneras se puede leer la palabra "RECONOCER" pudiendo repetir letras?

```

      R
    E E
  C C C
O O O O
N N N N N
  
```

11. Halla el total de palitos en:



12. Si:

$$M(1) = 4 \times 1 + 1$$

$$M(2) = 8 \times 4 + 8$$

$$M(3) = 12 \times 9 + 27$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

Calcula el valor de x, si:

$$M(x) = 4 \times 10^4$$

## ACTIVIDADES

1. Calcula la suma de cifras de:

$$M = \underbrace{(666\dots66)}_{12 \text{ cifras}}^2$$

- a) 108                      b) 102                      c) 110  
d) 104                      e) 103

2. Calcula la suma de cifras del resultado de:

$$B = \underbrace{(999\dots995)}_{101 \text{ cifras}}^2$$

- a) 900                      b) 925                      c) 625  
d) 90                      e) 907

3. Calcula la suma de cifras del resultado de:

$$M = \sqrt{100 \times 101 \times 102 \times 103 + 1}$$

- a) 5                      b) 6                      c) 7  
d) 8                      e) 10

4. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra INGENIO en el siguiente arreglo?

```

      I
     I N I
    I N G N I
   I N G E G N I
  I N G E N E G N I
 I N G E N I N E G N I
I N G E N I O I N E G N I
    
```

- a) 128                      b) 127                      c) 126  
d) 125                      e) 124

5. Los puntajes que tiene un alumno en la academia en sus exámenes son:

N.º examen	Puntaje
1	2
2	5
3	10
4	17
⋮	⋮

¿Cuál fue la nota que obtuvo en el décimo segundo examen?

- a) 120                      b) 146                      c) 145  
d) 148                      e) 150

6. ¿En qué cifra termina:

$$P = 4 + (10^{700} + 1) \dots (10^3 + 1) (10^2 + 1) (10 + 1)?$$

- a) 1                      b) 4                      c) 8  
d) 5                      e) 9

7. Halla la suma de todos los elementos de la siguiente matriz:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots & 9 & 10 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & \dots & 10 & 11 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 11 & 12 \\ 4 & 5 & 6 & 7 & \dots & 12 & 13 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 9 & 10 & 11 & 12 & \dots & 17 & 18 \\ 10 & 11 & 12 & 13 & \dots & 18 & 19 \end{bmatrix}$$

- a) 100                      b) 500                      c) 1000  
d) 1001                      e) 3000

8. Calcula:

$$E = \frac{35}{12} + \frac{3535}{1212} + \frac{353535}{121212} + \dots + \frac{3535\dots35}{1212\dots12}$$

24 cifras                      24 cifras

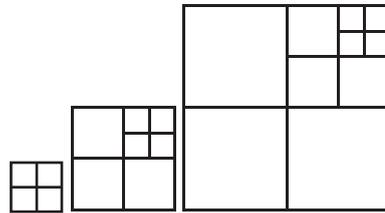
- a) 35                      b) 12                      c) 13  
d) 20                      e) 24

9. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer la palabra "INGRESO"?

I  
N N  
G G G R  
R R R E  
E E  
S S  
O

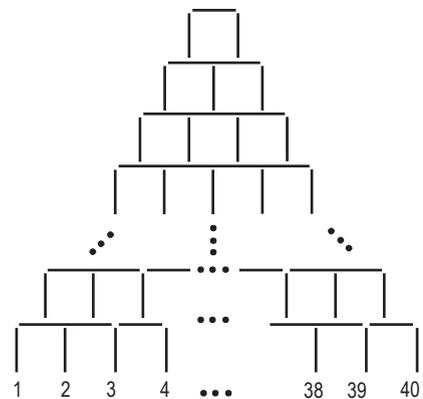
- a) 16                      b) 24                      c) 14  
d) 20                      e) 30

10. En la siguiente secuencia gráfica, halla el número total de cuadrados de la figura 60.



- a) 120                      b) 200                      c) 100  
d) 240                      e) 241

11. Halla el total de palitos que conforman la figura.



- a) 1 599                      b) 1 521                      c) 24 d)  
1 650                      e) 989

12. ¿De cuántas maneras diferentes se puede leer trotamundos?

N  
O        U        D  
R T    M    N O  
T O A   U D S  
R T M    N O  
O        U        D  
N

- a) 130                      b) 128                      c) 135  
d) 166                      e) 120