Triángulo Educativo

Geometría

5° SECUNDARIA

AREA DE REGIONES TRIANGULARES

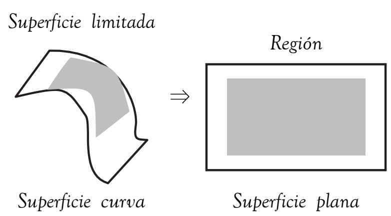
INTRODUCCIÓN

Como bien es sabido, el tamaño que presenta el terreno de la casa que habitamos, los terrenos de cultivo y en general las propiedades particulares y del estado, provocaron en nuestros antepasados, el establecimiento de una nueva magnitud denominada área, sin cuya definición hubiera sido imposible reconocer una diferencia entre la extensión de una superficie con relación a otra. No bastaba entonces saber la longitud de los lados de una figura, pues en algunos casos el tamaño de estas coinciden, mas no así las superficies que encerraban. Desde tiempos remotos, se sabe que fue a partir del rectángulo que se logró establecer una forma de medida del área en base al producto de sus lados. A partir de ella el área de un triángulo resultó ser la mitad del área de aquel. De este modo el área de un cuadrado, de un paralelogramo y en general de un polígono de lados, podían ser medidos en base a los dos primeros.

NOCIONES PREVIAS

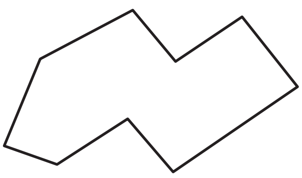
REGIÓN

La región es un conjunto de puntos pertenecientes a una superficie plana y limitado por una línea simple y cerrada.



REGIÓN POLIGONAL

La región poligonal es el conjunto de puntos pertenecientes al interior de un polígono unido con los puntos del polígono.

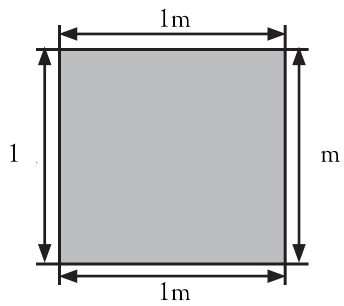


ÁREA

El área es la medida de la extensión de una superficie. La unidad de área del sistema internacional es el metro cuadrado con sus múltiplos y submúltiplos.

METRO CUADRADO

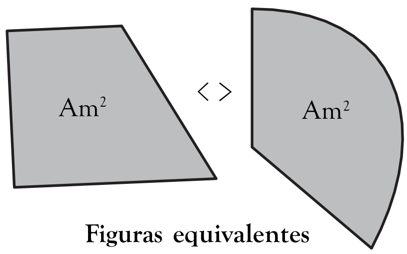
El metro cuadrado es el área de una región limitada por un cuadrado de un metro de lado.



Metro cuadrado (m^2)

FIGURAS EQUIVALENTES

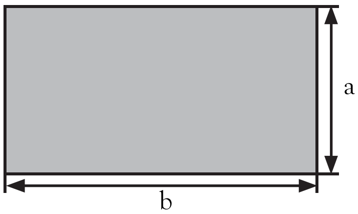
Dos figuras geométricas son equivalentes si teniendo formas diferentes tienen el mismo tamaño. Para figuras planas, el tamaño se refiere al área. Así dos figuras planas son equivalentes si tienen igual área.
Para figuras espaciales el tamaño se refiere al volumen. Así dos figuras espaciales son equivalentes si tienen igual volumen.



Figuras equivalentes

Teorema del área de un rectángulo

El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

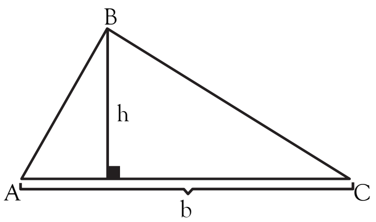


Demostración:

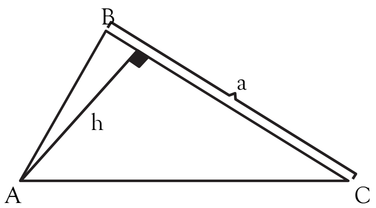
Si dividimos en "b" unidades lineales a lo largo del rectángulo y en "a" unidades lineales a lo ancho, se forman axb cuadrados de una unidad cuadrada que es el área del rectángulo.

Área de Regiones Triangulares

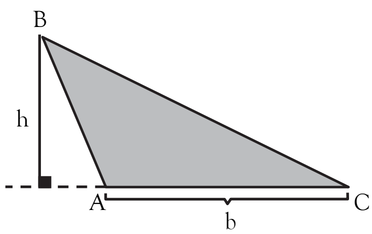
1) FÓRMULA BASE



$$\boxed{A=\frac{b.h}{2}}$$

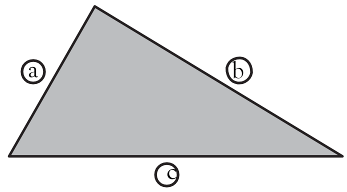


$$\boxed{A=\frac{a.h}{2}}$$



$$\boxed{A=\frac{b.h}{2}}$$

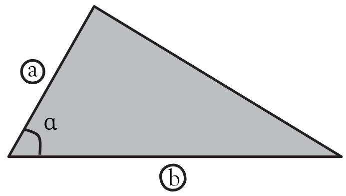
2) FÓRMULA DE HERÓN



Siendo: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

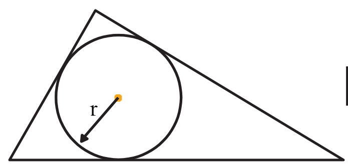
Se tiene: $\boxed{A=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$

3) FORMA TRIGONOMÉTRICA



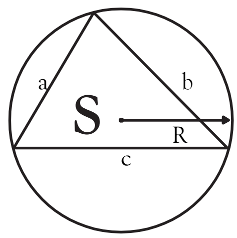
$$\boxed{A=\frac{a.b}{2}.\operatorname{sen}\alpha}$$

4) ÁREA EN FUNCIÓN DEL INRADIO



$$\boxed{A=p.r}$$

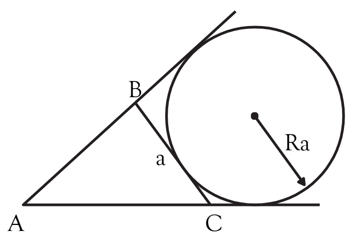
5) ÁREA EN FUNCIÓN DEL CIRCUNRADIO



R: circunradio

$$\boxed{S=\frac{abc}{4R}}$$

6) ÁREA EN FUNCIÓN DEL EXRADIO

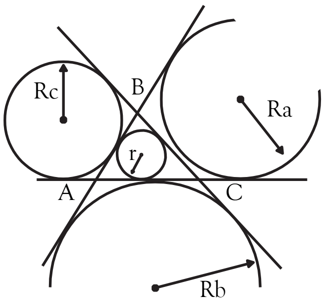


Ra: ExRadio

p: Semiperímetro

$$\boxed{S_{ABC}=(p-a)Ra}$$

7) ÁREA EN FUNCIÓN DEL INRADIO Y EXRADIO



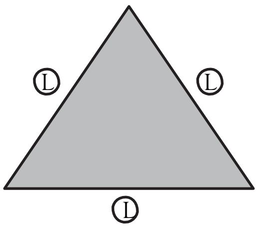
Ra,Rb,Rc: Exradios
r: inradio

$$\boxed{S_{ABC} = \sqrt{Ra.Rb.Rc.r}}$$

CASOS ESPECIALES

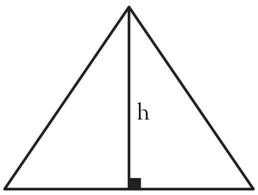
TRIÁNGULO EQUILÁTERO

I)



$$\boxed{A = L^2.\frac{\sqrt{3}}{4}}$$

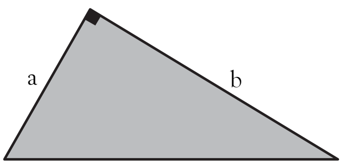
II)



$$\boxed{A = \frac{h^2\sqrt{3}}{3}}$$

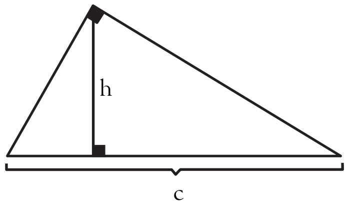
EN EL TRIÁNGULO RECTÁNGULO

I)



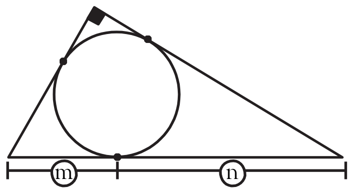
$$\boxed{A = \frac{a.b}{2}}$$

II)



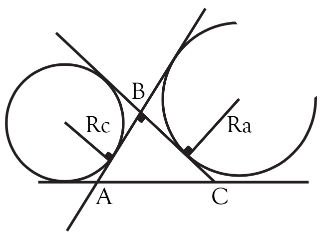
$$\boxed{A = \frac{c.h}{2}}$$

III)



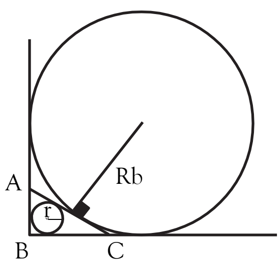
$$\boxed{A = m.n}$$

IV)



$$\boxed{S_{ABC} = Ra.Rc}$$

V)



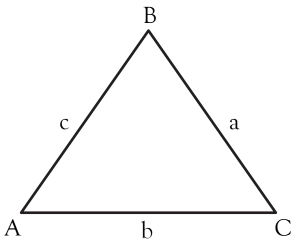
$$\boxed{S_{ABC} = Rb.r}$$

Observación:

$$\boxed{Ra.Rc = Rb.r}$$

Ejercicios Resueltos

1) Área de un triángulo en función del semiperímetro.



$$\boxed{S_{ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

Demostración:

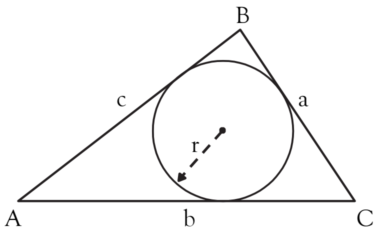
Sea: $p=\dfrac{a+b+c}{2}$

Se sabe: $S_{ABC}=\dfrac{b.h}{2}$ ....(1)

Pero: $h=\dfrac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

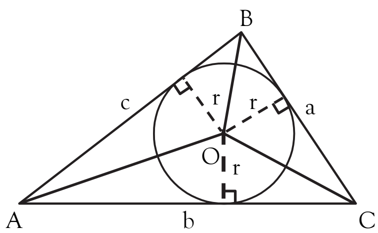
En (1): $S_{ABC}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

2) Área de un triángulo en función del inradio.



$\boxed{S_{ABC} = p.r}$ $\quad\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$

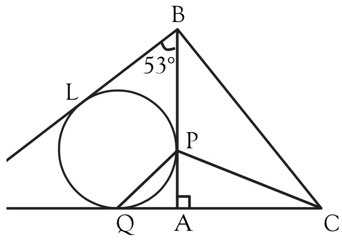
Demostración:



$$S_{ABC} = \frac{br}{2}+\frac{ar}{2}+\frac{cr}{2}$$

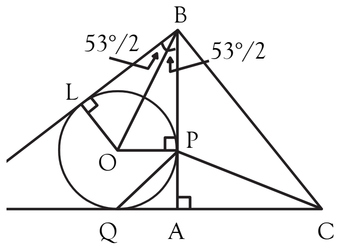
$$S_{ABC} = r\left(\frac{a+b+c}{2}\right)= r.p$$

3) En la figura L, P y Q son puntos de tangencia. Calcula el área del triángulo QPC si BL=6 u y AB=AC.



Resolución:

$S_{QPC}=\dfrac{(QC)(PA)}{2}$ ....(1)



$\overline{BO}$ bisectriz y BL=6;

$OL=OP=r=\dfrac{BL}{2}$

$\therefore$ r=3;

AP=r=3+ BL=PB=6

$\Rightarrow$ AB=6+3=9

$\Rightarrow$ AB=AC=9; QA=AP=3

En (1): $S_{QPC}=\dfrac{(3+9)3}{2}$

$\Rightarrow S_{QPC}=18\ u^2$

Rpta.: $S_{QPC}=18\ u^2$

Resolviendo en clase

1 En un triángulo la altura relativa a la base es cuatro veces el valor de dicha base. Si el área del triángulo es de $32m^2$, halla la suma de la base y de la altura.

Resolución:

Rpta:

2 Los lados de un triángulo ABC miden AB=5m; BC=8m y AC=11m. Halla el área de dicha región triangular.

Resolución:

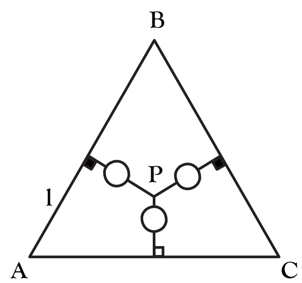
Rpta:

3 Los lados de un triángulo miden 5; 6 y 7 cm. Halla las longitudes del inradio y circunradio.

Resolución:

Rpta:

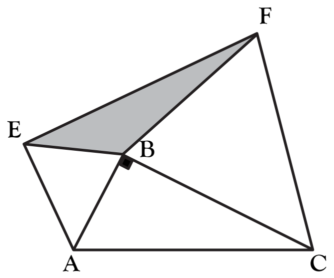
4 En la figura, halla el área del triángulo equilátero ABC.



Resolución:

Rpta:

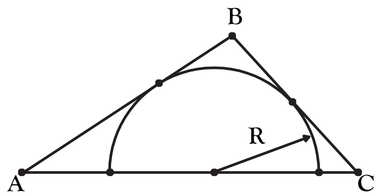
5 **En la figura, halla el área del triángulo EBF si el área del triángulo ABC es 20u², además ABE y BCF son triángulos equiláteros.**



***Resolución*:**

Rpta:

6 **Si AB=6, BC=8 y R=4, calcula el área del triángulo.**

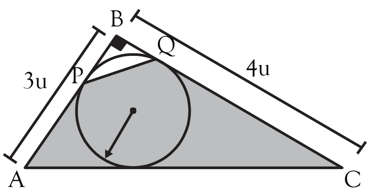


***Resolución*:**

Rpta:

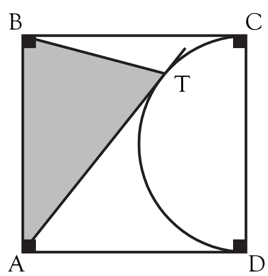
Ahora en tu cuaderno

7. Halla el área de la región sombreada (P y Q: puntos de tangencia).



8. Los lados de un triángulo miden $3\sqrt{2}$ dm, $\sqrt{26}$ dm y $2\sqrt{5}$ dm. Calcula el área del triángulo mencionado.

9. En la figura ABCD es un cuadrado de lado 20. Halla el área de la región sombreada siendo "T" punto de tangencia.



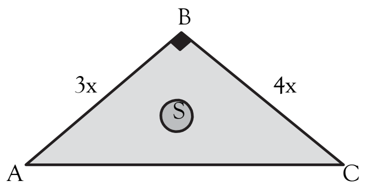
10. En un triángulo ABC se sabe que AB=5 y BC=8. ¿Para qué valor de AC el área la región triangular ABC será máxima?

11. En un triángulo rectángulo ABC recto en “B” se construye exteriormente el cuadrado ACDE. Si AB=4 y BC=6, halla el área del triángulo ABD.

12. Los exradios de un triángulo rectángulo miden 6 dm y 9 dm (relativos a los catetos). Calcula el área de la región de dicho triángulo.

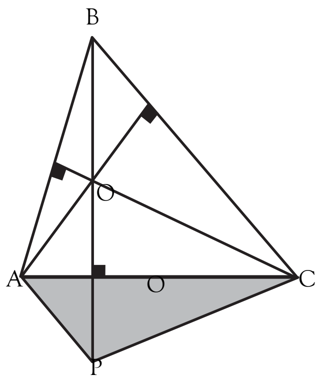
Para reforzar

1. Halla x si $S=216m^2$.



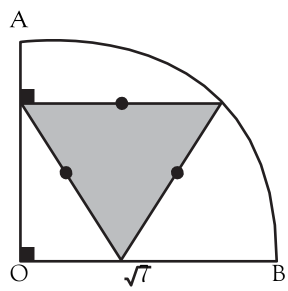
a) 1 m b) 3 m c) 2 m
d) 4 m e) 6 m

2. Calcula el área de la región triangular APC si las áreas de los triángulos ABC y AOC miden 16 y $9m^2$, respectivamente.



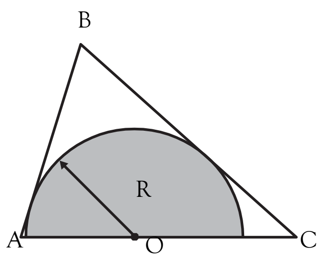
a) $16\ m^2$ b) $18\ m^2$ c) $25\ m^2$
d) $9\ m^2$ e) $10\ m^2$

3. Calcula el área de la región sombreada si “O” es centro.



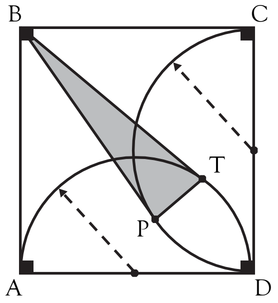
a) $3\ u^2$ b) $2\sqrt{3}\ u^2$ c) $3\sqrt{3}\ u^2$
d) $4\sqrt{3}\ u^2$ e) $6\sqrt{3}\ u^2$

4. En la figura AB=13, BC=15 y AC=14. Halla “R”.



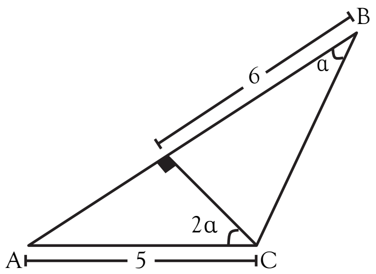
a) 5 b) 6 c) 8
d) 7 e) N.A.

5. La figura muestra un cuadrado ABCD de lado 10m. Halla el área de la región sombreada si P y T son puntos de tangencia.



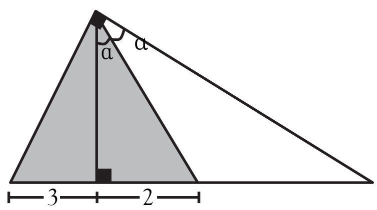
a) 48 u^2 b) 24 u^2 c) 14 u^2
d) 12 u^2 e) 10 u^2

6. En la figura, calcula el área del triángulo ABC.



a) 9 u^2 b) 12 u^2 c) 15 u^2
d) 10 u^2 e) 30 u^2

7. En la figura, calcula el área de la región sombreada.

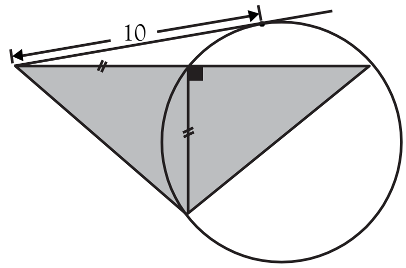


a) 5 u^2 b) 10 u^2 c) 15 u^2
d) 12 u^2 e) 20 u^2

8. Calcula el área de un triángulo cuyas alturas miden 12, 15 y 20.

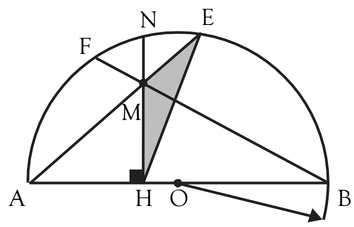
a) 300 u^2 b) 150 u^2 c) 75 u^2
d) 120 u^2 e) 100 u^2

9. En la figura, calcula el área de la región sombreada.



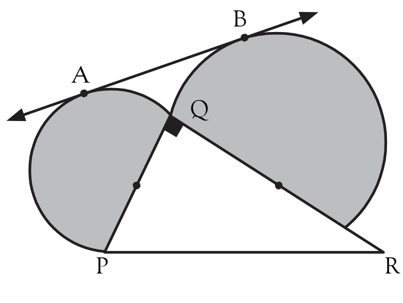
a) 30 u^2 b) 40 u^2 c) 50 u^2
d) 75 u^2 e) 100 u^2

10. Si $m\overset{\frown}{AF}=74°$, ME=6cm y HE=8cm, halla el área de la región sombreada.



a) 12,8 cm^2 b) 14,4 cm^2 c) 16,2 cm^2
d) 20,6 cm^2 e) 11,7 cm^2

11. Halla el área de la región triangular PQR si AB=10 dm.



a) 80dm^2 b) 90dm^2 c) 100dm^2
d) 140dm^2 e) 150dm^2

12. Calcula el área de la región triangular cuyas medianas miden 6, 9 y 12u respectivamente.

a) $9\sqrt{13}$ u^2 b) $7\sqrt{15}$ u^2 c) $9\sqrt{15}$ u^2
d) $7\sqrt{13}$ u^2 e) N.A.